EIGENSCHAPPEN VAN FUNDS

Voor IP's zijn de volgende wetten belangrijk:
$f_1 = P(\lambda_1, \alpha) \rightarrow f_i = P(\lambda_i, \alpha)$; $P\{P(f, \alpha), P(g, \alpha)\} = P(g, f)$; $P\{P(\alpha, f), P(\alpha, g)\} = P(f, g)$.
Deze wetten maken het mogelijk om IP's in producten te elimineren. In dit verband zeggen we, als het product van 2 funds in *K* ligt dat die funds dan dezelfde ***structuur*** hebben, d.w.z. dat zij beide in *K* liggen of anders te schrijven zijn als overeenkomstige producten van elementen van *K* en gelijke IP's met hetzelfde teken. We leiden vervolgens af:

Het product van twee funds behoort d.e.s.d. tot K als die funds dezelfde structuur hebben.

Een kubieke vergelijking met reële coëfficiënten heeft altijd tenminste één reële wortel en als bij een kubieke vergelijking alle coëfficiënten in *Q* c.q. in *K* liggen dan ligt tenminste één van de wortels in *Q* resp. *K*, anders is geen van die wortels construeerbaar (Vieta). Voorts geldt er bij fundamentele vergelijkingen dat elke wortel te schrijven is als een in *Q* liggende functie van elke andere wortel, waardoor funds voldoen aan: $f_1 \in R \rightarrow f_i \in R$, $f_1 \in Q \rightarrow f_i \in Q$, $f_1 \in K \rightarrow f_i \in K$, $f_1 \notin K \rightarrow f_i \notin K$. Conform Vieta geldt voor fundamentele vergelijkingen waarbij alle coëfficiënten tot *Q* c.q. *K* behoren, dat alle wortels in *Q* resp. *K* liggen en anders alle niet-construeerbaar zijn.

Stel dat $fp_1 \in Q$ en $gp_1 \notin Q$. Wegens $fp_i \in Q$ geldt $\sqrt{4p-7} \in Q$ zodat de nevenvergelijkingen alle coëfficiënten in *Q* hebben. Dan moeten de funds $gp_i \notin Q$ IP's hebben zodat $\frac{fp_i+gp_i}{2} = s_i \notin Q$. We kunnen $fp_i = s_i + m_i\sqrt{4p-7}$ en $gp_i = s_i - m_i\sqrt{4p-7}$ stellen. Voor fp_i geldt dat $s_i \notin Q$ en $\sqrt{4p-7} \in Q$ zodat $m_i \notin Q$. Dan $fp_i - gp_i \notin Q$ en bovendien $fp_i + gp_i \notin Q$, zodat $fp_i \wedge gp_i \notin Q$. Dit is in tegenspraak met $fp_i \in Q$ waardoor met fp_i ook gp_i tot *Q* moeten behoren. Deze afleiding is m.m. ook geldig voor het geval dat $fp_1 \in K$ en $gp_1 \notin K$.

Als een fundvergelijking een wortel in Q c.q. K heeft dan liggen de wortels van zijn nevenvergelijking en de wortels van hun productvergelijking eveneens in Q resp. K.

Als we bij cyclische systemen voor de vaste notatie $(fp_i \wedge gp_i) \in K$ kiezen dan zijn de structuren van alle voortbrengende funds te bepalen door gebruik te maken van enkele wetten (waarin *m* en $n \in K$):
$P\{P(m, \alpha), n\} = P\{\alpha, P(-n, m)\}$; $P\{P(\alpha, m), n\} = P\{P(n, m), \alpha\}$; $P\{P(\alpha, m), \alpha\} = P\{\alpha, P(m, -5)\}$.
Stellen we verder $P(fp, Zp) = fpt$ etc. dan geldt $Zp_i \wedge Zq_i \wedge Zr_i \in K$. Deze funds zijn in *K* liggende functies van de erbij betrokken toegevoegde cyclische constanten. We vinden:
$fp = \lambda \in K$ $\rightarrow$ $fqt = P(\lambda, \alpha)$ $\rightarrow$
$fq = P\{P(\lambda, \alpha), Zq\} = P(\alpha, m)$ $\rightarrow$ $frt = P\{P(\alpha, m), \alpha\} = P(\alpha, n)$ $\rightarrow$
$fr = P\{P(\alpha, n), Zr\} = P(\mu, \alpha)$ $\rightarrow$ $fpt = P\{P(\mu, \alpha), \alpha\} = \mu \in K$ $\rightarrow$
$fp = P(\mu, Zp) = \lambda \in K$ met $P(P(Zr, P(P(-Zq, \lambda), \phi(\alpha))), Zp) = \lambda$.

Voor de nevenwortels van bovenstaande wortels gelden hiermee in de pas lopende afleidingen, leidend tot een gelijke structuur per paar nevenfunds. De wortels van alle hierbij betrokken productvergelijkingen liggen dan in *K*. We zullen cyclische subsystemen waarbij precies één van de productvergelijkingen door in *K* liggende nevenfunds wordt voortgebracht als ***in K liggend*** benoemen.

EXTERNE SOMVERGELIJKINGEN

We onderzoeken $V_6 = pt_i^3 - \left(p_1 + \frac{7}{4}\right)pt_i^2 - \left(p_1^2 - \frac{3}{2}p_1 - \frac{7}{16}\right)pt_i + p_1^3 - \frac{7}{4}p_1^2 + \frac{7}{16}p_1 - \frac{49}{64} = 0$.
Om $V_6 = 0$ op te lossen met behulp van de algoritme van Cardano stellen we $y = 3pt - \left(p + \frac{7}{4}\right) = = m + n$ en vinden $m^3, n^3 = (-2p+7)\left(4p^2 - p + \frac{7}{4}\right) \pm \frac{3}{2}\left(4p^2 - p + \frac{7}{4}\right)\sqrt{-3(4p-7)}$.

De rechterleden van deze vergelijkingen zijn geen zuivere derdemachten, zodat er derdemachtswortels in de oplossing moeten voorkomen. Die derdemachtswortels zijn noodzakelijkerwijs aanwezig omdat uit $p \in K$ niet volgt dat $pt_i \in K$. Vervangen we echter p door zijn functie van t dan geldt, wegens $t \in K \leftrightarrow (p \wedge pt) \in K$, dat er geen derdemachtswortels in de oplossing voorkomen omdat die oplossing niet-incidenteel in *K* moet kunnen liggen; de algoritme geeft nu een zuivere derdemacht van de al eerder genoemde, in *K* liggende functie van *t*: $-\frac{1}{4}t + \frac{3}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{\frac{-4t^2+5t-23}{t+1}}$.

We zien, als de coëfficiënten van een kubieke vergelijking in *K* liggende functies van een parameter λ zijn en er geldt tevens $\lambda \in K \rightarrow x \in K$, dat de algoritme x_i dan als in *K* liggende functies van λ geeft.
Deze kanttekening bij de algoritme leidt tot een inzicht in welke vergelijkingen in *K* oplosbaar zijn bij cyclische systemen die in *K* liggen. In dergelijke systemen is $s \in K \leftrightarrow (f \wedge g) \in K$ de krachtigste voorwaarde; de uitdrukking van de coëfficiënten in de parameter s volstaat om alle voortbrengende nevenfunds door middel van in *K* liggende functies van de toepasselijke parameters te geven.
De keuze voor $s_i = sp_i$ leidt tot de volgende oplossingen:

$$fp_n = s_i + \frac{1}{s_i}\left\{\frac{(2t+3)s_i^2-(t+5)s_i+3-4\left(s_i^2+(t+1)s_i-1\right)(p-pt)}{(2t+4)s_i+(t-5)-4(t+1)\ (p-pt)}\right\}\sqrt{4p-7}$$

$$gp_n = s_i - \frac{1}{s_i}\left\{\frac{(2t+3)s_i^2-(t+5)s_i+3-4\left(s_i^2+(t+1)s_i-1\right)(p-pt)}{(2t+4)s_i+(t-5)-4(t+1)\ (p-pt)}\right\}\sqrt{4p-7}.$$

De geordende paren (i, n) van de indices doorlopen hierbij de reeks (1,3), (2,2) en (3,1). Voor de wortels van de toegevoegde nevenvergelijkingen vinden we overeenkomstige oplossingen, waarbij de geordende paren (i, n) van de indices de alternatieve reeks (1,1), (2,2) en (3,3) doorlopen:

$$fpt_n = s_i + \frac{1}{s_i}\left\{\frac{(2t+3)s_i^2-(t+5)s_i+3-4\left(s_i^2+(t+1)s_i-1\right)(pt-p)}{(2t+4)s_i+(t-5)-4(t+1)\ (pt-p)}\right\}\sqrt{4pt-7}$$

$$gpt_n = s_i - \frac{1}{s_i}\left\{\frac{(2t+3)s_i^2-(t+5)s_i+3-4\left(s_i^2+(t+1)s_i-1\right)(pt-p)}{(2t+4)s_i+(t-5)-4(t+1)\ (pt-p)}\right\}\sqrt{4pt-7}.$$

Er geldt $s_1 > 1 > s_2 > -1 > s_3$; een keuze binnen *K* van $1 > sp_2 > 0$ geeft toegevoegd complexe waarden voor p en pt_1; de keuze van $0 > sp_2 > -1$ geeft een cijfermatig model van een in *K* liggend cyclisch systeem.

o-o-o-o-o-o-o

Als de coëfficiënten van een kubieke vergelijking aan speciale eigenschappen voldoen dan kunnen er in de klasse van die vergelijking meerdere vergelijkingen liggen met coëfficiënten die aan dezelfde eigenschappen voldoen. Zo kunnen er in de klasse van $V = s^3 + s^2 + t_n s - 1 = 0$ ten hoogste 3 vergelijkingen liggen die eenzelfde soort functie vastleggen; de wortels van deze vergelijkingen moeten dan lineaire transformaties van elkaar zijn. We stellen deze vergelijkingen voor door:
$V_1 = x^3 + x^2 + t_a x - 1 = 0 \qquad V_2 = y^3 + y^2 + t_b y - 1 = 0 \qquad V_3 = z^3 + z^2 + t_c z - 1 = 0.$

Voor $\lambda x_i + \mu = y_i$ vinden we $\lambda = \pm\sqrt{\frac{3t_b-1}{3t_a-1}}$ en $\mu = -\frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3t_b-1}{3t_a-1}}$; de andere lineaire transformaties geven analoge waarden voor λ en μ. De wortels van die *s*-vergelijkingen zijn dan te schrijven als $s_i = -\frac{1}{3} \pm \sigma_i\sqrt{1-3t_n}$ met σ_i nog onbepaald. Substitutie van die waarden in $V_i = 0$ geeft 3 vergelijkingen van de gedaante $V(\sigma) = \sigma^3 - \frac{1}{3}\sigma \pm \frac{9t_n+25}{27\sqrt{(1-3t_n)^3}} = 0$.

Uit de afleiding van $\frac{(25+9t_a)^2}{(1-3t_a)^3} = \frac{(25+9t_b)^2}{(1-3t_b)^3} = \frac{(25+9t_c)^2}{(1-3t_c)^3}$ volgt dat de wortels $s_i = -\frac{1}{3} \pm \sigma_i\sqrt{1-3t_n}$ de corresponderende waarden σ_i gemeen hebben. De funds van de wortels van de in eenzelfde klasse liggende s-vergelijkingen zijn dus gelijk aan de funds van σ_i. Omgekeerd kan er bij elke $V(f) = 0$ in F_1 een waarde van η in $V(\sigma) = \sigma^3 - \frac{1}{3}\sigma \pm \eta = 0$ zodanig bepaald worden dat $V(\sigma) = 0$ in de klasse van $V(f) = 0$ ligt. Omdat η hier een reële in K liggende functie van de coëfficiënten van $V(f) = 0$ is, geldt $\eta \in K$. De coëfficiënten van $V(\sigma) = 0$ behoren dan tot K terwijl de funds van σ_i gelijk zijn aan $f_i \in K$, zodat $\sigma_i \in K$.

De gevonden notatie $s_i = -\frac{1}{3} \pm \sigma_i \sqrt{1 - 3t_n}$ voor de wortels van externe somvergelijkingen is algemeen geldig. We noemen $V(\sigma) = \sigma^3 - \frac{1}{3}\sigma \pm \frac{9t_n+25}{27\sqrt{(1-3t_n)^3}} = 0$ de ***gereduceerde s-vergelijking***. Een gereduceerde s-vergelijking is uniek in zijn klasse. Uit $V(\sigma) = \sigma^3 - \frac{1}{3}\sigma \pm \frac{9t_n+25}{27\sqrt{(1-3t_n)^3}} = 0$ vormen we via $x = \frac{3}{2}\sigma$ de per klasse unieke **trisectievergelijking** $V(x) = x^3 - \frac{3}{4}x \pm \frac{9t_n+25}{8\sqrt{(1-3t_n)^3}} = 0$.

o-o-o-o-o-o-o

Als $V(f) = f^3 + nf^2 - 9f - n = 0$ de klassenvergelijking is van $V_0 = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ met $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$, dan geldt $n = \pm\frac{9(2a^3-9ab+27c)}{\sqrt{12(a^2-3b)^3-3(2a^3-9ab+27c)^2}}$. Bepalen we de in de klasse van $V(f) = 0$ liggende $V(\sigma) = \sigma^3 - \frac{1}{3}\sigma \pm \eta = 0$ dan vinden we $\eta = \frac{2n}{27}\sqrt{\frac{1}{n^2+27}}$ zodat voor elke gegeven $V_0 = 0$ de in zijn klasse liggende s-vergelijking te bepalen is.

Bepalen we nu omgekeerd de klassenvergelijking van $V(\sigma) = \sigma^3 - \frac{1}{3}\sigma \pm \frac{9t_n+25}{27\sqrt{(1-3t_n)^3}} = 0$ dan geldt, als we voor t_n de waarde $-\frac{4p+4pt-3}{2}$ substitueren, dat $n = \pm\frac{36p+36pt-77}{(4p+4pt-5)(4p-4pt)}$.

Uit $n = +\frac{36p+36pt-77}{(4p+4pt-5)(4p-4pt)}$ volgt $pt = \frac{5n-9+\sqrt{64n^2p^2-(80n^2+144n)p+25n^2+218n+81}}{8n}$.

Uit $n = -\frac{36p+36pt-77}{(4p+4pt-5)(4p-4pt)}$ volgt $p = \frac{5n-9+\sqrt{64n^2pt^2-(80n^2+144n)pt+25n^2+218n+81}}{8n}$.

We vinden hiermee een afleidbaar verband tussen paren toegevoegde cyclische constanten.

0-0-0-0-0-0-0