

Universiteit van Amsterdam
ITFA, Institute for Theoretical Physics

BACHELORSCRIPTIE
voor
natuur- /sterrenkunde

Begeleider: Jan Pieter van der Schaar

Andries van der Leden^{*}

De energie van het vacuüm

^{*}<aleden@science.uva.nl>

Amsterdam, Juli 2008

Samenvatting

Deze scriptie gaat over een van de gevolgen van de quantumveldentheorie. Deze theorie lostte een aantal problemen op, maar creëerde er ook enkele, waaronder een probleem met de energie van het vacuüm. Het doel is om dit probleem te onderzoeken, waarom is het een probleem, hoe kan dit probleem opgelost worden, waaruit volgt dat dit een vrij groot probleem is dat tot op heden nog niet is opgelost. Naast de energie van het vacuüm zullen ook o.a. het Casimir effect en de kosmologische constante besproken worden. De conclusie is dat het verschil tussen de theoretische waarde en de experimentele waarde van de energie van het vacuüm, een factor $\sim 10^{120}$, door verschillende problemen nog niet opgelost is en dat het wellicht wachten is op een complete en consistente theorie van quantum gravitatie voordat dit probleem echt opgelost kan worden.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	4
2	Quantumveldentheorie	7
2.1	Van harmonische oscillatoren naar velden	7
2.1.1	Een collectie van harmonische oscillatoren	7
2.1.2	De actie functionaal van een veld	8
2.2	De modes van het veld	10
2.3	Energie van het vacuüm van een vrij scalar veld	12
2.3.1	Oplossing voor een vrij scalar veld	13
3	Het Casimir effect	14
3.1	1+1 dimensies	15
3.1.1	Regularisatie en renormalisatie	16
3.2	3+1 dimensies	17
3.3	Experimentele bevestiging	18
3.4	Discussie over het Casimir effect	21
4	Gravitatie en de kosmologische constante	22
4.1	De actie functionaal met gravitatie	22
4.2	De Einstein vergelijkingen	23
4.2.1	De geodeet en het Christoffel symbool	23
4.2.2	Het expanderende universum	25
4.2.3	Het Christoffel symbool en de FRW metriek	26
4.2.4	De Einstein vergelijkingen	27
4.3	De energie-momentum tensor	28
4.3.1	De Friedmann vergelijking	29
4.4	De kosmologische constante	30
4.4.1	Energie-momentum tensor van materie in het vacuüm	31
5	Suggesties voor een oplossing van het cc probleem	35
5.1	Supersymmetrie	35
5.2	De dynamische kosmologische constante	37
5.2.1	Weinberg's No-Go Theorie	37
5.2.2	Instabiliteiten in dS-ruimte	37
5.3	Het multiversum en antropisch selectiemechanisme	39
5.4	Discussie	40
6	Conclusie	41
A	Notatie	42

Hoofdstuk 1

Inleiding

Nieuwe theorieën brengen nieuwe ontdekkingen met zich mee. Begin vorige eeuw dacht men nog dat de natuurkunde bijna af was, we hadden de revolutionaire electrodynamica met de Maxwell vergelijkingen¹ en het enige wat er nog gevonden moest worden was de zogenaamde "ether". Deze werd echter nooit gevonden en toen Einstein in 1905 met zijn speciale relativiteitstheorie [3] kwam volgden nieuwe theorieën zoals de algemene relativiteitstheorie en quantum mechanica snel. Deze nieuwe theorieën echter zorgden voor veel nieuwe vragen en nieuwe problemen. Zo bleek dat speciale relativiteitstheorie en quantum mechanica enkele problemen met zich meebrachten en deze theorieën werden samengevoegd tot de quantumveldentheorie. De basis in deze scriptie zal de quantumveldentheorie [4] zijn². Door de quantumveldentheorie zien we echter een nieuw probleem ontstaan, een probleem wat tot op heden wordt gezien als een van de grootste theoretische problemen in de natuurkunde, namelijk de energie van het vacuüm.

Klassieke mechanica

In klassieke en quantum mechanica is er geen probleem met de energie van het vacuüm. Toch zit er al een groot verschil tussen deze energieën. Het vacuüm is gedefinieerd als de toestand met de laagst mogelijke energie. We zullen nu de klassieke harmonische oscillator vergelijken met een gekwantiseerde harmonische oscillator. We beginnen met het actie principe. De functie $q(t)$ beschrijft de bewegingsbaan van een object. Hierbij gebruiken we de actie functionaal

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q(t), \dot{q}(t), \dots) dt \quad (1.1)$$

waarbij het extremum van deze functionaal gevonden wordt om de bewegingsvergelijking te bepalen, om hieraan te voldoen moet de actie reële waarden hebben en moet het een extremum hebben. Hierbij is $L(t, q(t), \dot{q}(t), \dots)$ gedefinieerd als de Lagrangiaan van het systeem. Een functionaal zorgt ervoor dat je een functie kan afbeelden als een getal. Met behulp van deze actie functionaal kunnen we een bewegingsvergelijking opstellen door een functionele afgeleide te nemen naar $q(t)$ en het extremum te vinden.

$$\frac{\delta S[q(t)]}{\delta q(t)} = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L(t, q(t), \dot{q}(t), \dots)}{\partial q(t)} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L(t, q(t), \dot{q}(t), \dots)}{\partial \dot{q}(t)} \right) \right] dt. \quad (1.2)$$

Hieruit volgt de Euler-Lagrange vergelijking

$$\frac{\partial L(t, q(t), \dot{q}(t), \dots)}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(t, q(t), \dot{q}(t), \dots)}{\partial \dot{q}(t)} = 0 \quad (1.3)$$

en dit is de bewegingsvergelijking voor een systeem dat beschreven wordt door een Lagrangiaan.

¹Er zijn meerdere interessante boeken hierover te vinden zoals het boek van Griffiths [1] of Jackson [2].

²Een goede basis voor quantum mechanica is te lezen in een boek van Griffiths [5].

Aan de hand van de Euler-Lagrange vergelijking kunnen we de klassieke harmonische oscillator bekijken. Deze kan beschreven worden aan de hand van een Lagrangiaan en daaruit kan vervolgens de bewegingsvergelijking opgelost worden. De Lagrangiaan van een klassieke harmonische oscillator is

$$L(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} (m\dot{q}^2 - m\omega^2 q^2). \quad (1.4)$$

We zien dat deze Lagrangiaan niet expliciet van de tijd afhangt en m is de massa en ω is de frequentie. We zien dat hieruit de volgende bewegingsvergelijking volgt

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \quad (1.5)$$

en de vacuüm toestand van de oscillator is de toestand zonder beweging, dus $q \equiv 0$. Zoals we zien is dit een oplossing van de Euler-Lagrange vergelijking met de randvoorwaarden $q(0) = \dot{q}(0) = 0$.

Hamiltoniaan formalisme

Naast de Lagrangiaan is het ook handig om de Hamiltoniaan te gebruiken, we zullen zien dat we in de quantumveldentheorie voornamelijk de Hamiltoniaan gebruiken voor berekeningen. We passen een zogenaamde Legendre transformatie toe waaruit we de impuls p als volgt definiëren

$$p \equiv \frac{\partial L(t, q, \dot{q})}{\partial \dot{q}}. \quad (1.6)$$

Uit de klassieke Lagrangiaan volgt dan dat $p = m\dot{q}$ en \dot{q} is de snelheid v waaruit we de Hamiltoniaan krijgen

$$H(p, q, t) \equiv [p\dot{q} - L(t, q, \dot{q})]_{\dot{q}=v} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2. \quad (1.7)$$

We zien dat deze functie bijna gelijk is aan de Lagrangiaan, alleen is de Lagrangiaan $L = T - U$ en de Hamiltoniaan is $H = T + U$ waarbij T de kinetische energie is en U de potentiële energie. Een voordeel van de Hamiltoniaan is dat je niet meer te maken hebt met een differentiaal vergelijking. Omdat $H(p, q, t) = p\dot{q} - L(t, q, \dot{q})$ kunnen we een Hamiltoniaan actie definiëren als volgt

$$S_H[p(t), q(t)] \equiv \int_{t_1}^{t_2} [p\dot{q} - H(p, q, t)] dt \quad (1.8)$$

Hieruit kunnen we, equivalent aan de Lagrangiaan, een bewegingsvergelijking opstellen door de functionale afgeleide naar p en q .

$$\frac{\delta S}{\delta p} = \frac{\partial}{\partial p} p\dot{q} - \frac{\partial}{\partial p} H = 0 \rightarrow \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (1.9)$$

$$\frac{\delta S}{\delta q} = \frac{\partial}{\partial q} p\dot{q} \Big|_{t_1}^{t_2} - \frac{\partial}{\partial q} \int p\dot{q} dt - \frac{\partial}{\partial q} \int H dt \rightarrow \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (1.10)$$

We zien dat bij (1.9) een voorwaarde is dat \dot{q} onafhankelijk is van p . Bij (1.10) zien we dat we gebruik hebben gemaakt van partiële integratie en dat de functie $p\dot{q}$ verdwijnt door de voorwaarden van de integraal. Verder zien we dat een voorwaarde is dat \dot{p} onafhankelijk is van q .

Quantum mechanica

We hebben de Hamiltoniaan geïntroduceerd, omdat we deze Hamiltoniaan gaan kwantiseren. Dit doen we door de variabelen $q(t), p(t)$ om te zetten in de operatoren $\hat{q}(t), \hat{p}(t)$. De Heisenberg's onzekerheidsrelatie vertelt ons dat het fysisch onmogelijk is om plaats en impuls tegelijkertijd te meten en daardoor kunnen we \hat{q} en \hat{p} uitdrukken via een commutatierelatie

$$[\hat{q}(t), \hat{p}(t)] = i\hbar. \quad (1.11)$$

We kunnen de operatoren ook op een golffunctie laten werken en daaruit volgt

$$\hat{q}\psi = q\psi, \quad \hat{p}\psi = -i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial q}. \quad (1.12)$$

We zetten de Hamiltoniaan om in een operator $\hat{H} = H(\hat{p}, \hat{q}, t)$ en vullen de operatoren \hat{p} en \hat{q} in (1.7) waaruit we de volgende Hamiltoniaan operator krijgen

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dq^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (1.13)$$

en deze operator laten we op een golffunctie werken

$$\hat{H}\psi = E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dq^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \psi. \quad (1.14)$$

Het eerste deel van deze vergelijking betekent dat de energie de eigenwaarde is van de Hamiltoniaan. Dit betekent dat we deze energie op de volgende manier kunnen berekenen

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad \rightarrow \quad \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = E\langle\psi|\psi\rangle = E. \quad (1.15)$$

Nu zijn er 2 manieren om de energie van het vacuüm te berekenen. Men kan dat doen aan de hand van de golffunctie van de grondtoestand, er is echter nog een tweede simpelere manier, namelijk door de Hamiltoniaan op te schrijven met behulp van de annihilatie operatoren \hat{a}_+ en \hat{a}_- . Deze zijn als volgt gedefiniëerd

$$a_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (\mp ip + m\omega q) \quad (1.16)$$

en vervolgens kan je de Hamiltoniaan opschrijven als

$$H = \hbar\omega \left(a_+ a_- + \frac{1}{2} \right). \quad (1.17)$$

Het handige aan de annihilatie en creatie operatoren is dat de golffunctie er gemakkelijk mee te berekenen is. De operatoren werkend op de grondtoestand is zo bepaald dat

$$a_- \psi_0 = 0 \quad (1.18)$$

$$\frac{(a_+)^n}{\sqrt{n!}} \psi_0 = \psi_n \quad (1.19)$$

waarbij A_n de normalisatie factor is³. Aangezien dit altijd geldt voor de grondtoestand, kunnen we nu vrij makkelijk de energie van het vacuüm berekenen, want dat is

$$\hat{H}\psi_0 = \hbar\omega \left(\hat{a}_+ \hat{a}_- + \frac{1}{2} \right) \psi_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega \psi_0 \quad (1.20)$$

en hieruit volgt dat de laagst mogelijke energie van een harmonische oscillator in de quantum mechanica gelijk is aan

$$E = \frac{1}{2} \hbar\omega \quad (1.21)$$

en dat is dus een eindige waarde, maar wel een heel andere waarde dan in de klassieke theorie. Nu zal de quantumveldentheorie onder de loep genomen worden, deze theorie heeft wel degelijk een groot probleem met het bepalen van de laagst mogelijke energie. Ook zal vanaf nu gewerkt worden met $\hbar = c = 1$ ⁴.

³Een bewijs hiervan kan gevonden worden in [5].

⁴zie appendix A voor de standaard notatie die gebruikt wordt.

Hoofdstuk 2

Quantumveldentheorie

Quantumveldentheorie is een theorie die speciale relativiteitstheorie en quantum mechanica bij elkaar voegt. Het probleem van het oneindige vacuüm energie volgt uit het feit dat een veld in de quantumveldentheorie bestaat uit oneindig veel harmonische oscillatoren. Zoals we net zagen in formule (1.21) heeft elke harmonische oscillator een minimum energie die niet gelijk is aan nul. Dit zorgt voor een groot probleem omdat een oneindige vacuüm energie de ruimtetijd oneindig zou moeten krommen (volgens de algemene relativiteitstheorie) maar dit nemen we niet waar. Er is dus iets dat ervoor moet zorgen dat deze waarde niet oneindig wordt.

In dit hoofdstuk zullen een aantal belangrijke aspecten geïntroduceerd worden, zoals velden, mode expansie, nulpunts energie. Om de berekeningen te versimpelen gaan we ervan uit dat het veld ϕ een reële scalar veld is.

2.1 Van harmonische oscillatoren naar velden

2.1.1 Een collectie van harmonische oscillatoren

Voor verder te gaan met velden, zal er eerst gekeken worden naar een set van harmonische oscillatoren. Dit gebeurt zodat later duidelijk wordt waarom een veld vergeleken mag worden met oneindig veel harmonische oscillatoren. We gebruiken de actie van (1.1) en de Lagrangiaan zoals (1.4). Deze formules gelden voor één harmonische oscillator, nu generaliseren we dit tot N harmonische oscillatoren

$$S[q_i] = \frac{1}{2} \int \sum_{i=1}^N (\dot{q}_i^2 - \omega_i^2 q_i^2) dt. \quad (2.1)$$

Nu quantiseren we de harmonische oscillatoren en gebruiken de standaard commutatierelaties

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}; \quad [\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad (2.2)$$

en voeren analoog aan (1.16) de annihilatie en creatie operatoren¹ in

$$\hat{a}_i^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_i}} (\mp i\hat{p}_i + \omega_i \hat{q}_i) \quad (2.3)$$

en we gebruiken de vacuüm toestand $|0, \dots, 0\rangle$, dit is de eigenvector van de annihilatie operator \hat{a}_i^- met eigenwaarde 0.

$$\hat{a}_i^- |0, \dots, 0\rangle = 0 \quad (2.4)$$

¹De operatoren zijn tijd afhankelijk, maar in dit geval gebruiken we alleen tijd onafhankelijke operatoren. De relatie tussen de tijd afhankelijke en onafhankelijke is $\hat{a}_i^{\pm}(t) = \hat{a}_i^{\pm} e^{\pm i\omega_i t}$.

Echter, de creatie operator kan, analoog aan (1.19), geschreven worden als

$$\left[\prod_{i=1}^N \frac{(\hat{a}_i^+)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} \right] |0, \dots, 0\rangle = |n_1, \dots, n_N\rangle \quad (2.5)$$

en aangezien $|0, \dots, 0\rangle$ de vacuüm toestand is kunnen we deze ook korter noteren als $|0\rangle$.

2.1.2 De actie functionaal van een veld

Nu voeren we een veld in. Een veld is een functie afhankelijk van de ruimte-tijd, $\phi(\vec{x}, t)$, wat ook genoteerd kan worden als een viervector $\phi(x^\mu)$. We kunnen een actie $S[\phi]$ opschrijven door een algemenere vorm van formule (2.1) te nemen en q_i te vervangen door het veld $\phi(\vec{x}, t)$. Door dit te doen, veranderen we dus de actie van een set met N harmonische oscillatoren door een actie met een veld. In de nieuwe actie vervangen we de sommatie door een integraal over alle ruimtes, $\int d^3\vec{x}$, waaruit blijkt dat één veld beschouwd kan worden als een set van oneindig oscillatoren. De actie voor een veld ϕ is dan

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int dt \left(\int d^3\vec{x} \dot{\phi}^2(\vec{x}, t) - \int d^3\vec{x} d^3\vec{y} \phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{y}, t) M(\vec{x}, \vec{y}) \right) \quad (2.6)$$

waarin $M(\vec{x}, \vec{y})$ een functie is die de koppeling tussen de velden $\phi(\vec{x}, t)$ en $\phi(\vec{y}, t)$ beschrijft, in actie (2.1) was de matrix $M_{\alpha\beta}$ aanwezig maar deze kon door een coördinaten transformatie geschreven worden als $M_{ij} = \delta_{ij}\omega_i^2$. De actie moet voldoen aan het feit dat het een lokale functie is van het veld en zijn afgeleides, dat betekent dat het veld of zijn afgeleides alleen van een variabele mogen afhangen, $\phi(x^\mu)$ en niet van meerdere variabelen $\phi(x^\mu - y^\mu)$, dit omdat lokale acties een stuk simpeler zijn dan niet lokale acties en de lokale actie al Poincaré invariant is. Een relativistische actie moet invariant zijn onder transformaties van de Poincaré groep². De simpelste actie voor een scalar veld die voldoet aan Poincaré-invariantie heeft $M(\vec{x}, \vec{y}) = [-\nabla_{\vec{x}}^2 + m^2] \delta(\vec{x} - \vec{y})$ waaruit volgt dat de actie functionaal voor een scalar veld is

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x [\eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - m^2 \phi^2] \quad (2.7)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} dt [\dot{\phi}^2 - (\nabla \phi)^2 - m^2 \phi^2] \quad (2.8)$$

waarbij $\eta^{\mu\nu}$ de Minkowski metriek is (A.9, appendix A) van een vlakke ruimte-tijd. Zoals we al in (1.1) zagen kunnen we de Langrangiaan van het systeem opschrijven, maar wat in dit geval eenvoudiger is, omdat de Langrangiaan een integraal bevat over de ruimten, om de Langrangiaan dichtheid te definiëren.

$$S[\phi] = \int L dt = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) dt d^3\vec{x} \rightarrow L = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^3\vec{x} \quad (2.9)$$

We hebben de actie (2.7), daaruit kunnen we een bewegingsvergelijking opstellen voor het veld ϕ . Dit doen we door de functionele afgeleide te nemen naar ϕ . Dit gebeurt op dezelfde manier als in (1.2).

$$\delta S[\phi] = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta_\mu \phi \right] \quad (2.10)$$

De tweede term met de afgeleiden komt voor, omdat als je het veld verstoord met $\delta \phi$, dan zullen ook de afgeleiden van het veld, $\partial_\mu \phi$ verstoord worden. We willen een term overhouden aan de rechterkant die alleen van $\delta \phi$ afhangt, de tweede term met $\delta_\mu \phi$ kan omgeschreven worden tot

²Deze beschrijft de 4 translatie en 3 rotatie symmetrieën en de 3 "boosts", oftewel de lorentz transformaties.

$\delta(\partial_\mu\phi)$ waardoor we krijgen

$$\delta S[\phi] = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta(\partial_\mu\phi) \right] \quad (2.11)$$

$$= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \delta\phi \right]. \quad (2.12)$$

In de middelste term staat een gehele afgeleide, de integraal over een afgeleide kan geschreven worden als de functie zelf met de ingevulde randvoorwaarden.

$$\int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \Big|_{\mu_1}^{\mu_2} \quad (2.13)$$

De randvoorwaarden worden zo gekozen dat deze term nul wordt, waardoor het volgende overblijft

$$\delta S[\phi] = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \right] \delta\phi \quad (2.14)$$

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi} = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \right] = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) = 0 \quad (2.16)$$

waarbij (2.16) de bewegingsvergelijking is, analoog aan de Euler-Lagrange vergelijking (1.3). Uit de actie (2.7) kan vervolgens de Langrangiaan dichtheid gehaald worden waaruit de bewegingsvergelijking volgt.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} (\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - m^2\phi^2) \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) = (\square + m^2) \phi = 0 \quad (2.18)$$

waarin \square (A.18) de d'Alembertian is en (2.18) de bekende Klein-Gordon vergelijking is. Dit is een relativistische vergelijking en deze kan geschreven worden (in (\vec{x}, t) coördinaten) als $\ddot{\phi} - (\nabla\phi)^2 + m^2\phi = 0$. Verder kan een Hamiltoniaan gemaakt worden, door een impuls $\pi(\vec{x}, t)$ te definiëren en net als in (1.6) is deze impuls

$$\pi(\vec{x}, t) \equiv \frac{\delta L(\phi, \dot{\phi})}{\delta \dot{\phi}(\vec{x}, t)} = \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)}{\partial \dot{\phi}(\vec{x}, t)} = \dot{\phi}(\vec{x}, t) \quad (2.19)$$

en daaruit volgt vanuit de klassieke Hamiltoniaan (1.7) waarbij een Hamiltoniaan dichtheid gedefiniëerd kan worden.

$$H = \int \pi(\vec{x}, t) \dot{\phi}(\vec{x}, t) d^3\vec{x} - L \quad (2.20)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \left[\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 \right] \quad (2.21)$$

$$\mathcal{H} \equiv \pi(\vec{x}, t) \dot{\phi}(\vec{x}, t) - \mathcal{L} \quad (2.22)$$

We quantiseren het veld door de operatoren $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$ en $\hat{\pi}(\vec{x}, t)$ in te voeren en de daarbij horende commutatierelaties net als in (1.11)

$$\left[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t) \right] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}) ; \quad \left[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\phi}(\vec{y}, t) \right] = [\hat{\pi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] = 0. \quad (2.23)$$

Nu kan het veld $\phi(\vec{x}, t)$ opgeschreven worden alsof het een harmonische oscillator is $\phi_{\vec{x}}(t)$ op een coördinaat \vec{x} . Om dit te doen kan je de harmonische oscillatoren $\phi_{\vec{x}}(t)$ los koppelen van het veld $\phi(\vec{x}, t)$, dit gebeurt door middel van een Fourier transformatie. De Fourier getransformeerde van het veld $\phi(\vec{x}, t)$ noemen we de mode $\phi_{\vec{k}}(t)$.

2.2 De modes van het veld

We beginnen door de modes te ontkoppelen van het veld door een Fourier transformatie toe te passen.

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \phi_{\vec{k}}(t) \quad (2.24)$$

$$\phi_{\vec{k}}(t) = \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \phi(\vec{x}, t) \quad (2.25)$$

Zometeen zal blijken dat het erg handig is om met de modes $\phi_{\vec{k}}(t)$ te werken. De Klein-Gordon vergelijking (de bewegingsvergelijking van het veld) zal er voor de modes uitzien als

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + k^2 + m^2 \right) \phi_{\vec{k}}(t) = 0. \quad (2.26)$$

We zien dat, als we deze bewegingsvergelijking vergelijken met (1.5), dat de modes een frequentie hebben van

$$\omega_k \equiv \sqrt{k^2 + m^2}. \quad (2.27)$$

De complex geconjugeerde van de mode $\phi_{\vec{k}}(t)$ is

$$\phi_{\vec{k}}^*(t) = \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \phi^*(\vec{x}, t) \quad (2.28)$$

$$= \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \phi(\vec{x}, t) \equiv \phi_{-\vec{k}}(t) \quad (2.29)$$

waaruit volgt dat we $|\phi_{\vec{k}}(t)|^2$ kunnen schrijven als $\phi_{\vec{k}}(t)\phi_{-\vec{k}}(t)$. Hierdoor kan de actie (2.8) uitgedrukt worden via de modes.

$$S = \frac{1}{2} \int dt d^3\vec{k} \left(\dot{\phi}_{\vec{k}} \dot{\phi}_{-\vec{k}} - \omega_{\vec{k}}^2 \phi_{\vec{k}} \phi_{-\vec{k}} \right) \quad (2.30)$$

De modes $\phi_{\vec{k}}(t)$ worden door de quantisatie ook operatoren $\hat{\phi}_{\vec{k}}(t)$ en de bijbehorende impuls $\pi_{\vec{k}}(t)$ wordt ook een operator $\hat{\pi}_{\vec{k}}(t)$. Hieruit kan de commutatierelatie tussen $\hat{\phi}_{\vec{k}}(t)$ en $\hat{\pi}_{\vec{k}}(t)$ afgeleid worden.

$$\begin{aligned} \left[\hat{\phi}_{\vec{k}_1}(t), \hat{\pi}_{\vec{k}_2}(t) \right] &= \hat{\phi}_{\vec{k}_1}(t) \hat{\pi}_{\vec{k}_2}(t) - \hat{\pi}_{\vec{k}_2}(t) \hat{\phi}_{\vec{k}_1}(t) \\ &= \int \frac{d^3\vec{x} d^3\vec{y}}{(2\pi)^3} e^{-i(\vec{k}_1\cdot\vec{x} + \vec{k}_2\cdot\vec{y})} \left(\hat{\phi}(\vec{x}, t) \hat{\pi}(\vec{y}, t) - \hat{\pi}(\vec{y}, t) \hat{\phi}(\vec{x}, t) \right) \\ &= \int \frac{d^3\vec{x} d^3\vec{y}}{(2\pi)^3} e^{-i(\vec{k}_1\cdot\vec{x} + \vec{k}_2\cdot\vec{y})} i \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= i \int \frac{d^3\vec{y}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{y}\cdot(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)} = i \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \end{aligned} \quad (2.31)$$

De commutatierelatie is dus $\left[\hat{\phi}_{\vec{k}_1}(t), \hat{\pi}_{\vec{k}_2}(t) \right] = i \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)$ met een + teken in plaats van een - teken zoals we bij (2.23) zien. Stel dat in dit geval \vec{k}_1 en \vec{k}_2 gelijk aan elkaar zijn, $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$, dan krijgen we dus uit de commutatierelatie $\delta(2\vec{k}_1)$ in plaats van $\delta(\vec{0})^3$. Om toch een commutatierelatie op te stellen waarbij $\delta(\vec{0})$ uit komt als $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$, dan krijgen we

$$\left[\hat{\phi}_{\vec{k}_1}(t), \hat{\pi}_{-\vec{k}_2}(t) \right] = i \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2). \quad (2.32)$$

³wat naar oneindig gaat, wat wil zeggen dat je te maken hebt met de onzekerheidsrelatie van Heisenberg; bij een deeltje kan nooit tegelijkertijd de plaats en impuls precies bekend zijn.

We introduceren de annihilatie en creatie operatoren zoals in (2.3)

$$\hat{a}_{\vec{k}}^{\pm}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\mp i \hat{\pi}_{\mp \vec{k}} + \omega_k \hat{\phi}_{\mp \vec{k}} \right). \quad (2.33)$$

Deze operatoren zijn tijdsafhankelijk en zijn te schrijven als tijdsafhankelijke operatoren door de relatie $\hat{a}_{\vec{k}}^{\pm}(t) = \hat{a}_{\vec{k}}^{\pm}(0)e^{\pm i\omega_k t}$ waarbij de tijdsafhankelijke operatoren voortaan genoteerd worden als $\hat{a}_{\vec{k}}^{\pm}$. We werken hier alleen met de tijdsafhankelijke operatoren en deze voldoen aan de commutatierelaties.

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\vec{k}_1}^-, \hat{a}_{\vec{k}_2}^+] &= \frac{1}{2\omega_k} \left\{ i\omega_k \left([\hat{\pi}_{\vec{k}_1}, \hat{\phi}_{\vec{k}_2}] + [\hat{\pi}_{\vec{k}_2}, \hat{\phi}_{\vec{k}_1}] \right) \right\} \\ &= -\frac{i}{2} \left([\hat{\phi}_{\vec{k}_2}, \hat{\pi}_{\vec{k}_1}] + [\hat{\phi}_{\vec{k}_1}, \hat{\pi}_{\vec{k}_2}] \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\delta(-\vec{k}_2 + \vec{k}_1) + \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \right) = \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \end{aligned} \quad (2.34)$$

De andere commutatierelaties zijn $[\hat{a}_{\vec{k}_1}^-, \hat{a}_{\vec{k}_2}^-] = [\hat{a}_{\vec{k}_1}^+, \hat{a}_{\vec{k}_2}^+] = 0$. We postuleren de vacuüm toestand als $|0\rangle$ zodanig dat $\hat{a}_{\vec{k}}^- |0\rangle = 0$ voor alle \vec{k} . Equivalent aan (2.5) kan de creatie operator op de vacuüm toestand werken.

$$\left[\prod_s \frac{(\hat{a}_{\vec{k}_s}^+)^{n_s}}{\sqrt{n_s!}} \right] |0\rangle = |n_1, \dots\rangle \quad (2.35)$$

Deze formule geldt per mode \vec{k}_s . Hier zien we terug dat een veld vergeleken mag worden met een set van oneindig harmonische oscillatoren. De toestand $|n_1, \dots\rangle$ beschrijft de aanwezigheid van n_s deeltjes met een impuls \vec{k}_s . De Hamiltoniaan (2.20) kan door de modes beschreven worden

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{k} \left[\hat{\pi}_{\vec{k}} \hat{\pi}_{-\vec{k}} + \omega_k^2 \hat{\phi}_{\vec{k}} \hat{\phi}_{-\vec{k}} \right] \quad (2.36)$$

wat omgeschreven kan worden met behulp van de annihilatie en creatie operatoren tot

$$\hat{H} = \int d^3\vec{k} \frac{\omega_k}{2} \left(\hat{a}_{\vec{k}}^- \hat{a}_{\vec{k}}^+ + \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}}^- \right) \quad (2.37)$$

en deze formule is, met behulp van de commutatierelatie (2.34), dan

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^3\vec{k} \frac{\omega_k}{2} \left\{ [\hat{a}_{\vec{k}}^-, \hat{a}_{\vec{k}}^+] + 2 \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}}^- \right\} \\ &= \int d^3\vec{k} \omega_k \left(\hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}}^- + \frac{1}{2} \delta(\vec{0}) \right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Deze Hamiltoniaan geldt voor een vrij scalar veld en zal zo handig blijken om het vacuüm energie te berekenen.

Mode expansie

Er is een kortere manier om velden te quantiseren. Dit gebeurt door middel van mode expansie. Zoals eerder al gezien is, zijn de annihilatie en creatie operatoren uit te drukken in $\hat{\phi}_{\vec{k}}$ en $\hat{\pi}_{\vec{k}}$. Nu kan dit ook omgedraaid worden; de operatoren $\hat{\phi}_{\vec{k}}$ en $\hat{\pi}_{\vec{k}}$ zijn uit te drukken in de annihilatie en creatie operatoren. Vanuit (2.33) volgt dat

$$\hat{\phi}_{\vec{k}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\hat{a}_{\vec{k}}^- e^{-i\omega_k t} + \hat{a}_{-\vec{k}}^+ e^{i\omega_k t} \right) \quad (2.39)$$

$$\hat{\pi}_{\vec{k}}(t) = i \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left(-\hat{a}_{\vec{k}}^- e^{-i\omega_k t} + \hat{a}_{-\vec{k}}^+ e^{i\omega_k t} \right) \quad (2.40)$$

waar de e-machten ervoor zorgen dat het tijd afhankelijke functies zijn. Hieruit kan vervolgens het veld $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$ berekend worden door (2.24).

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\hat{a}_{\vec{k}}^- e^{-i\omega_k t} + \hat{a}_{-\vec{k}}^+ e^{i\omega_k t} \right) \quad (2.41)$$

Deze relatie wordt de *mode expansie* van het veld $\phi(\vec{x}, t)$ genoemd.

2.3 Energie van het vacuüm van een vrij scalar veld

De energie van het vacuüm kan berekend worden aan de hand van de Hamiltoniaan (2.38). Met een vrij scalar veld wordt bedoeld een scalar veld zonder gravitatie en potentiaal mee te nemen in de berekening. We hebben immers een actie gebruikt waar gravitatie niet in voor kwam, maar gravitatie is een onderwerp wat later aan bod komt. De energie wordt net zoals in (1.15) berekend.

$$\begin{aligned} E_0 &= \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \langle 0 | \int d^3\vec{k} \omega_k \left(\hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}}^- + \frac{1}{2} \delta(\vec{0}) \right) | 0 \rangle \\ &= \int d^3\vec{k} \omega_k \left(\langle 0 | \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}}^- | 0 \rangle + \langle 0 | \frac{1}{2} \delta(\vec{0}) | 0 \rangle \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Aangezien de annihilatie operator werkend op een vacuüm toestand een eigenwaarde van 0 heeft, wordt de eerste term 0 en valt deze weg. Dan blijft de term $\delta(\vec{0})$ over.

$$E_0 = \frac{1}{2} \int d^3\vec{k} \omega_k \delta(\vec{0}) \quad (2.43)$$

In deze formule zitten twee problemen. Het eerste probleem is de term $\delta(\vec{0})$. De delta functie kan met behulp van een Fourier transformatie geschreven worden als

$$\delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) = \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)}. \quad (2.44)$$

Stel nu dat geldt dat $k_1 = k_2$, dan is $\delta(\vec{0}) = \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^3}$ en aangezien deze integraal gaat over alle mogelijk waarden voor \vec{x} , zal deze $\delta(\vec{0})$ naar oneindig gaan.

Het tweede probleem dat we tegenkomen in (2.43) is de rest van de integraal; $\int d^3\vec{k} \omega_k$. Deze integraal zal divergeren, want als we $\int d^3\vec{k}$ opschrijven in sferische coördinaten, dan krijgen we

$$\int d^3\vec{k} \omega_k = \int 4\pi k^2 \omega_k dk = \int 4\pi k^2 \sqrt{k^2 + m^2} dk \quad (2.45)$$

De grenzen van deze integraal loopt van 0 naar oneindig, we zien dat deze integraal divergeert met $\sim k^4$. Het eerste probleem is echter te verhelpen. De $\delta(\vec{0})$ geeft aan dat we met een oneindige ruimte te maken hebben. Deze ruimte vervangen we door een volume $\frac{V}{(2\pi)^3}$ en nemen hiervan de limiet naar oneindig. Hierdoor krijgen we de energiedichtheid.

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{E_0}{V} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \omega_k \quad (2.46)$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{(2\pi)^2} k^2 \sqrt{k^2 + m^2} dk \quad (2.47)$$

Het tweede probleem kan vermeden worden door een cutoff Λ_c in te voeren, een limiet tot waar onze fysica bekend is. We nemen voor deze limiet een waarde waarvoor we veilig kunnen stellen dat $\Lambda_c \gg m$ waardoor de energiedichtheid die overblijft gelijk is aan

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{E_0}{V} \simeq \frac{\Lambda_c^4}{16\pi^2}. \quad (2.48)$$

We kunnen nu in principe een willekeurige cutoff pakken, echter we moeten naar de fysica blijven kijken van het probleem; we bekijken de energie schalen tot waar de huidige theorieën werken. Er zijn verschillende mogelijkheden [25], zoals de 'quantum chromodynamics' (QCD) schaal van $\Lambda_{\text{QCD}} = 0.3 \text{ GeV}$, of de schaal van de grand unified theory, $\Lambda_{\text{GUT}} = 10^{16} \text{ GeV}$. We weten dat de cutoff in ieder geval groter is dan tot waar de theorie experimenteel bevestigd is, dus $\Lambda_c > \Lambda_{\text{exp}}$, waarbij Λ_{exp} het punt is waarop de theorie bevestigd is door experimenten. Voor het vacuüm kiezen we de cutoff op die energie waarvan we denken dat tot daar de quantumveldentheorie nog geldig is, de planck schaal, boven deze energie is er een theorie van 'quantum gravity' nodig om dit soort energieën te beschrijven. Om de waarde te bekijken van deze planck schaal keren we terug naar SI eenheden, we gebruiken de planck constante \hbar , de snelheid van het licht c en de Newton constante G^4 . Vervolgens krijg je de planck energie

$$\Lambda_c = E_p = M_p c^2 = \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{\frac{1}{2}} c^2 = 1,2 \cdot 10^{19} \text{ GeV}. \quad (2.49)$$

Let op dat $1,6 \cdot 10^{-10} \text{ J}$ gelijk is aan 1 GeV . Hieruit volgt dat de energiedichtheid gelijk is aan

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{E_0}{V} \simeq \frac{\Lambda_c^4}{16\pi^2} = 1,3 \cdot 10^{74} \text{ GeV}^4. \quad (2.50)$$

Dit is een enorm getal, de maximale waarde die we verwachten⁵ [6] is $\sim 10^{-47} \text{ GeV}^4$. Dit scheelt ongeveer een factor $\sim 10^{121}$. De energiedichtheid van $1,3 \cdot 10^{74} \text{ GeV}^4$ zou moeten leiden tot sterke gravitationele effecten, we nemen deze echter niet waar. Als we een andere cutoff zouden kiezen, zoals die van QCD, dan krijgen we al een andere waarde voor de energiedichtheid, namelijk

$$\Lambda_c = \Lambda_{\text{QCD}} = 0.3 \text{ GeV} \rightarrow \frac{\Lambda_{\text{QCD}}^4}{16\pi^2} = 5.1 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^4 \quad (2.51)$$

maar zelfs dit scheelt nog een factor $\sim 10^{42}$, terwijl we weten dat de QCD werkt en dus een bijdrage levert aan de vacuüm energiedichtheid, dus hoe kan de energiedichtheid van het vacuüm nou zo klein zijn. Het oplossen van dit probleem is een van de grootste theoretische problemen.

2.3.1 Oplossing voor een vrij scalar veld

We bekijken het vrije scalar veld. Ondanks het grote probleem van de vacuüm energie, zijn er geen problemen zolang we gravitatie buiten beschouwing laten. Dit komt doordat we in theorieën zonder gravitatie (quantum mechanica, quantumveldentheorie) alleen geïnteresseerd zijn in energie verschillen en niet in de absolute waarde van de energie. Energieën van een hoger gelegen toestand kan geschreven worden als $E = E_0 + \sum_s n_s \omega_{k_s}$, waardoor de E_0 term wegvalt als je twee energieën met elkaar vergelijkt. Hierdoor wordt de Hamiltoniaan (2.38) hergedefinieerd als

$$\hat{H} = \int d^3\vec{k} \omega_k \left(\hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}}^- \right) \quad (2.52)$$

waardoor het vacuüm energie verandert in

$$E_0 = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \int d^3\vec{k} \omega_k \langle 0 | \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}}^- | 0 \rangle = 0. \quad (2.53)$$

Dit noemen we ook wel 'normal ordering'. De energie wordt nul, wat zou mogen, als we alleen kijken naar energie verschillen. Zodra we gravitatie erbij betrekken, mag dit niet meer, omdat een aanwezige energie de ruimte-tijd kromt. Zodra we dus gravitatie erbij voegen, komt het probleem van de veel te grote energiedichtheid weer terug. Nu zal eerst een van de voorspellingen van de quantumveldentheorie aan bod komen, het Casimir effect.

⁴De gebruikte waarden zijn terug te vinden in de Appendix A.

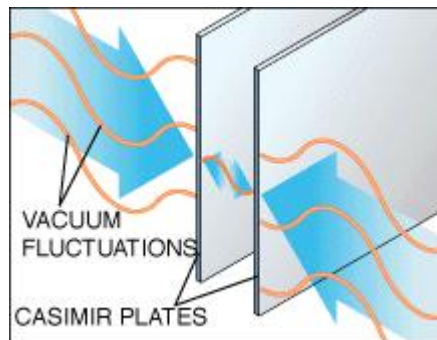
⁵Dit is eigenlijk de waarde voor de kosmologische constante, echter de energiedichtheid van het vacuüm geeft een contributie tot deze kosmologische constante, meer hierover in hoofdstuk 4.

Hoofdstuk 3

Het Casimir effect

Een van de meest opzienbarende voorspellingen van de quantumveldentheorie is het Casimir effect. In 1948 schreef H. Casimir een artikel [7] waarin hij, naar aanleiding van een vorig artikel van hem samen met D. Polder [8], de aantrekkingskracht berekende van twee ongeladen, geleidende platen. Deze kracht kan alleen verklaard worden door de velden van de nulpuntsenergie van het vacuüm. Een simpele redenatie hiervoor is dat zowel binnen als buiten de platen quantumfluctuaties optreden. Echter door de randvoorwaarden van de platen kunnen er tussen de platen alleen velden zijn die een geheel aantal keer passen. Hierdoor worden de langere velden buiten gesloten, die wel in het vacuüm buiten de platen voorkomen. De structuur van de quantumfluctuaties verandert dus en dat zorgt voor een energie verandering ΔE van de vacuüm energie. Deze ΔE is afhankelijk van de afstand L tussen de platen. Door deze ΔE zullen de platen dichter bij elkaar willen gaan staan en dat staat bekend als de Casimir kracht.

$$F(L) = -\frac{d}{dL}\Delta E(L) \quad (3.1)$$



Figuur 3.1: Het Casimir effect; de platen zorgen ervoor dat de velden 0 zijn op de oppervlaktes van de platen, hierdoor veranderen de quantumfluctuaties en is er een ΔE ten opzichte van het nulpuntsenergie, waardoor er een kracht ontstaat.

In de volgende secties worden zowel het 1+1 dimensionele als het 3+1 dimensionele geval besproken, dit omdat er gebruik gemaakt wordt van bepaalde technieken die in beide gevallen aan bod komen. Ook wordt het duidelijk in beide gevallen waarom de energie van het vacuüm niet makkelijk te berekenen is en er dus een mooie analogie tussen beide berekeningen is.

3.1 1+1 dimensies

Om de berekening wat te versimpelen nemen we aan dat het veld $\phi(t, x)$ in een 1+1 dimensionele ruimte-tijd geen massa heeft en een scalar veld is. Verder schrijven we de vectoren $\vec{x} = x$ en $\vec{k} = k$ op, aangezien we het 1+1 dimensionele geval bekijken. We hebben 2 platen, een plaat op $x = 0$ en een plaat op $x = L$, dus $0 < x < L$ en we hebben hierdoor de randcondities $\phi(t, x)|_{x=0} = 0$ en $\phi(t, x)|_{x=L} = 0$. De bewegingsvergelijking voor velden is gegeven door de Klein-Gordon vergelijking $\phi(t, x) - \nabla^2 \phi(t, x) + m^2 \phi(t, x) = 0$ en omdat we aannemen dat $\phi(t, x)$ massaloos is, verandert de vergelijking tot $\partial_t^2 \phi(t, x) - \partial_x^2 \phi(t, x) = 0$. De algemene oplossing voor deze functie die aan de randvoorwaarden voldoet wordt gegeven door de volgende functie.

$$\phi(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{-i\omega_n t} + B_n e^{i\omega_n t}) \sin \omega_n x; \quad \omega_n \equiv \frac{n\pi}{L} \quad (3.2)$$

Vervolgens quantizeren we het veld $\phi(t, x)$ door middel van mode expansie. Echter, omdat niet alle modes mogelijk zijn door de randvoorwaarden, ziet de functie er iets anders uit dan we eerder (2.41) gezien hebben. De functie die we krijgen is dan

$$\hat{\phi}(t, x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n x}{\sqrt{2\omega_n}} (\hat{a}_n^- e^{-i\omega_n t} + \hat{a}_n^+ e^{i\omega_n t}). \quad (3.3)$$

Door gebruik te maken van de commutatierelatie $[\hat{a}_m^-, \hat{a}_n^+] = \delta_{mn}$ kan vervolgens de nulpuntsenergie per lengte berekend worden. We weten dat de totale nulpuntsenergie gelijk is aan $\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle$, dus de energie per lengte wordt dan

$$\varepsilon_0(L) = \frac{1}{L} \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle \quad (3.4)$$

waarbij de \hat{H} berekend kan worden door de bewegingsvergelijking en die is dan

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int_0^L dx \left[\left(\frac{\partial \hat{\phi}(t, x)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{\phi}(t, x)}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (3.5)$$

Vervolgens berekenen we $\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle$ en gebruiken we

$$\langle 0 | \hat{a}_m^-, \hat{a}_n^+ | 0 \rangle = \delta_{mn}; \quad \langle 0 | \hat{a}_m^+, \hat{a}_n^+ | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_m^-, \hat{a}_n^- | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_m^+, \hat{a}_n^- | 0 \rangle = 0. \quad (3.6)$$

Voor veld ϕ in de Hamiltoniaan vullen we de gevonden $\hat{\phi}$ in die we gevonden hebben via mode expansion (3.3) waardoor we het volgende vinden

$$\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \int_0^L dx \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{2} (\sin^2 \omega_n x + \cos^2 \omega_n x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n. \quad (3.7)$$

Als we deze vergelijking vervolgens invoeren in (3.4) zien we dat we de volgende uitdrukking overhouden

$$\varepsilon_0(L) = \frac{1}{L} \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{1}{2L} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n = \frac{\pi}{2L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n. \quad (3.8)$$

Nu hebben we een uitdrukking voor de energiedichtheid, we willen nu nog een uitdrukking vinden voor $\Delta\varepsilon$ zodat we uiteindelijk de kracht F tussen de platen kunnen berekenen doordat $L\Delta\varepsilon = \Delta E$. Deze $\Delta\varepsilon$ is niets anders dan de vacuüm energiedichtheid af te trekken van de energiedichtheid tussen de platen (3.8). De vacuüm energiedichtheid kunnen we beschouwen als 2 platen op een oneindige afstand, dus als je de limiet neemt van de energiedichtheid tussen de platen

$$\varepsilon_0 = \lim_{L \rightarrow \infty} \varepsilon_0(L) \quad (3.9)$$

waardoor de functie ontstaat

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_0(L) - \varepsilon_0 = \varepsilon_0 - \lim_{L \rightarrow \infty} \varepsilon_0(L). \quad (3.10)$$

Door middel van regularisatie is het mogelijk om de $\Delta\varepsilon$ te berekenen, hiervoor is renormalisatie voor de termen ε_0 en $\lim_{L \rightarrow \infty} \varepsilon_0(L)$ nodig.

3.1.1 Regularisatie en renormalisatie

Het probleem bij de functie hierboven is dat je twee oneindige termen van elkaar aftrekt. Beide hebben tenslotte een som die divergeert, dus dat moet opgelost worden om een eindig getal eruit te krijgen. Dit doet men met behulp van twee technieken; regularisatie en renormalisatie. Bij regularisatie zorgt men voor een extra parameter in de functie, waardoor de functie eindig wordt tenzij de parameter op 0 ingesteld is. Dit wordt ook wel een cutoff genoemd. Na regularisatie bekijkt men het asymptotische gedrag van de functie bij kleine waarde van de cutoff parameter (men neemt het limiet van de cutoff parameter richting 0). Renormalisatie zorgt er vervolgens voor dat de divergerende termen weggelaten kunnen worden (mag alleen als er een goed fysisch argument achter zit). Na de renormalisatie zet men de cutoff parameter op 0 en houdt men alleen eindige termen over. Een geschikte cutoff wordt gekozen op basis van fysische argumenten.

In dit geval kiezen we een cutoff van $e^{-\frac{n\alpha}{L}}$ omdat $\frac{n\alpha}{L}$ evenredig is met ω_n . Hierdoor krijgen we de volgende functie

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(L, \alpha) &= \frac{\pi}{2L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{n\alpha}{L}} = -\frac{\pi}{2L} \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n\alpha}{L}} \\ &= -\frac{\pi}{2L} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{1 - e^{-\frac{\alpha}{L}}} = \frac{\pi}{2L^2} \frac{e^{-\frac{\alpha}{L}}}{(1 - e^{-\frac{\alpha}{L}})^2} \\ &= \frac{\pi}{2L^2} \frac{1}{(e^{\frac{\alpha}{2L}} - e^{-\frac{\alpha}{2L}})^2} = \frac{\pi}{8L^2} \frac{1}{\sinh^2 \frac{\alpha}{2L}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

De middelste stap is makkelijk te zien als je $e^{-\frac{n\alpha}{L}} = e^{-\left(\frac{\alpha}{L}\right)^n}$ stelt en de serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ gebruikt. Als je de limiet neemt van $\alpha \rightarrow 0$ kan je de uitdrukking expanderen in een Laurent serie¹

$$\varepsilon_0(L, \alpha) = \frac{\pi}{8L^2} \frac{1}{\sinh^2 \frac{\alpha}{2L}} = \frac{\pi}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{24L^2} + O(\alpha^2). \quad (3.12)$$

We zien dus dat we een eindige term overhouden, namelijk $-\frac{\pi}{24L^2}$. Nu kunnen we $\Delta\varepsilon$ berekenen door

$$\Delta\varepsilon = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\varepsilon_0(L, \alpha) - \lim_{L \rightarrow \infty} \varepsilon_0(L, \alpha) \right] = -\frac{\pi}{24L^2}. \quad (3.13)$$

De Casimir kracht tussen de platen is dan

$$F = -\frac{d}{dL} (L\Delta\varepsilon) = -\frac{\pi}{24L^2} \quad (3.14)$$

en omdat het teken negatief is, is het dus een kracht die ervoor zorgt dat de platen aangetrokken worden. Om een experiment te kunnen bedenken met betrekking tot het Casimir effect, zullen we de kracht moeten berekenen in 3+1 dimensies.

¹Als je niet bekend bent met Laurent series raad ik je aan Kreyszig's *Advanced engineering mathematics* [9] te raadplegen, maar er zijn vast nog voldoende andere boeken over dit onderwerp.

3.2 3+1 dimensies

In 3+1 dimensies gebeurt eigenlijk hetzelfde, de energie van het vacuüm wordt afgetrokken van de energie tussen de platen; $\Delta E = \frac{1}{2} (\sum \omega_n)_1 - \frac{1}{2} (\sum \omega_n)_2$. We berekenen in dit geval de kracht per oppervlakte van de platen en we gebruiken dat

$$0 < x < a, \quad 0 < y < a, \quad 0 < z < L$$

waarbij de platen dus in de xy-vlak liggen. We definiëren ω_n analoog aan de 1+1 dimensies, waaruit volgt

$$\omega_n = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}n_x\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}n_y\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}n_z\right)^2}. \quad (3.15)$$

Verder kunnen we ω_n opschrijven als functie van het golfgetal k .

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{\pi^2}{L^2} n^2} \right). \quad (3.16)$$

Hierboven veranderen we van n naar golfgetal k , waardoor we ook de $k = 0$ term mee moeten nemen. We gebruiken vervolgens dat k_z opgeschreven kan worden als $\frac{\pi}{L}n$ en het gesommeerd wordt over n waardoor de nulde term 0 is, we laten echter wel gewoon de k_x en de k_y staan. Er zit een factor 2 in de tweede term, omdat alle k_x , k_y , k_z corresponderen met 2 staande golven, tenzij een van de n gelijk aan 0 is, dus daarom komt er een factor 2 bij voor de sommatie van $n = 1$. De sommatie over k mag vervangen worden door een integraal over k omdat er gesommeerd wordt over oneindig veel mogelijkheden en deze integraal over k mag vervangen worden door een dubbel integraal over k_x en k_y . Hierdoor krijgen we dat

$$\frac{1}{2} \sum \omega_n = \frac{a^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\frac{1}{2} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{\pi^2}{L^2} n^2} \right] dk_x dk_y. \quad (3.17)$$

De factor $\frac{a^2}{4\pi^2}$ is een oppervlakte term die erin komt omdat we het over platen hebben. Vervolgens introduceren we poolcoördinaten r en φ en voeren we een notatie in voor de som van 0 tot ∞ terwijl de nulde term met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd moet worden. Deze som noteren we als $\sum_{n=(0)1}^\infty$, zodat we krijgen

$$\frac{1}{2} \sum \omega_n = \frac{a^2}{4\pi^2} 2\pi \sum_{n=(0)1}^\infty \int_0^\infty \sqrt{r^2 + \frac{\pi^2}{L^2} n^2} r dr. \quad (3.18)$$

Voor de nulpuntsenergie zijn er geen beperkingen wat betreft n , dus mogen we deze som ook opschrijven als een integraal, waardoor we de volgende uitdrukking krijgen

$$\Delta E = \frac{a^2}{2\pi} \left[\sum_{n=(0)1}^\infty \int_0^\infty \sqrt{r^2 + \frac{\pi^2}{L^2} n^2} r dr - \int_0^\infty \int_0^\infty \sqrt{r^2 + \frac{\pi^2}{L^2} n^2} r dr dn \right]. \quad (3.19)$$

Vervolgens voeren we een cutoff functie in, zodat de term die hierboven staat berekend kan worden. Deze cutoff wordt ingevoerd met de volgende redenatie: voor korte golven (X-rays etc.) zijn de platen nauwelijks een obstakel en zullen de golven onverstoord verder gaan, alsof ze in het vacuüm zitten. Aangezien $\lambda \sim \frac{1}{k}$ willen we dus een functie die voor kleine golflengtes (en dus grote golfgetallen) naar 0 gaat, dus $\frac{k}{k_m} \rightarrow \infty$, dan $f(k/k_m) \rightarrow 0$. Vervolgens passen we ook nog een transformatie van variabele toe; $u = \frac{L^2 r^2}{\pi^2}$ waaruit volgt

$$\Delta E = \frac{a^2 \pi^2}{4L^3} \left[\sum_{n=(0)1}^\infty \int_0^\infty \sqrt{n^2 + u} f(\pi \sqrt{n^2 + u} / L k_m) du - \int_0^\infty \int_0^\infty \sqrt{n^2 + u} f(\pi \sqrt{n^2 + u} / L k_m) du dn \right]. \quad (3.20)$$

Doordat de factor $\frac{\pi^2}{L^2}$ uit de integraal is gehaald en $du = \frac{2L^2 r}{\pi^2} dr$ zien we de voorfactor ontstaan. De laatste stap die vervolgens gemaakt wordt is dat er gebruik wordt gemaakt van de Euler-Maclaurin formule²

$$\sum_{n=(0)1}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} F(n) dn = -\frac{1}{12} F'(0) + \frac{1}{720} F'''(0) + \dots \quad (3.21)$$

en als we veranderen naar variabele w door $w = u + n^2$ krijgen we

$$F(n) = \int_{n^2}^{\infty} \sqrt{w} f(w\pi/Lk_m) dw \quad (3.22)$$

waaruit volgt dat de enige waarde die we krijgen komt uit $F'''(0)$ en dat is -4, alle andere afgeleiden worden 0 op het punt 0. We krijgen dus

$$\Delta E = -a^2 \frac{\pi^2}{720} \frac{1}{L^3} \rightarrow \frac{\Delta E}{a^2} = -\frac{\pi^2}{720} \frac{1}{L^3}. \quad (3.23)$$

De uiteindelijke kracht per oppervlak van de platen die we dan vinden is

$$\frac{F}{a^2} = -\frac{1}{a^2} \frac{d}{dL} \Delta E = -\frac{\pi^2}{240} \frac{1}{L^4}. \quad (3.24)$$

Zoals we zien is er een redelijke analogie tussen de 1+1 dimensionele berekening en de 3+1 dimensionele berekening. Het belangrijkste is dat in beide gevallen regularisatie en renormalisatie nodig is om een eindig antwoord over te houden. Er is nog een manier om deze eindige waarden te berekenen, namelijk door gebruik te maken van de Riemann zeta functie [11]

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}. \quad (3.25)$$

Deze functie convergeert zolang $x > 1$, echter door deze functie te veranderen in een complexe functie (met behulp van analytische continuatie) kan deze ook bekeken worden in het complexe vlak, waardoor deze functie ook berekend kan worden voor negatieve waarden. In het geval van 1+1 dimensies krijgen we met behulp van (3.8)

$$\varepsilon_0(L) = \frac{\pi}{2L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n = \frac{\pi}{2L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} \quad (3.26)$$

$$\varepsilon_0(L) = \frac{\pi}{2L^2} \zeta(-1) = -\frac{\pi}{24L^2} \quad (3.27)$$

waaruit direct het antwoord volgt doordat $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. Ondanks dat de kracht ook met behulp van analytische continuatie te berekenen is, lijkt er geen fysische betekenis achter te zitten en is het inzichtelijker om de andere methode met regularisatie en renormalisatie toe te passen. Het gebruik van de Riemann zeta functie is echter een handige truc.

3.3 Experimentele bevestiging

Het is belangrijk dat dit effect ook experimenteel aangetoond kan worden, want als dit effect echt te meten is, betekent het dat het Casimir effect laat zien dat het vacuüm energie echt is en dus van fysisch belang is om er rekening mee te houden. Is het Casimir effect echter niet te meten, dan zou het kunnen zijn dat vacuüm energie iets puur theoretisch is. Ondanks dit was het artikel van Casimir niet erg bekend tot de jaren '70, later werd het echter erg bekend en zijn er meerdere

²Het verband tussen een som en een integraal werd zowel door Euler als Maclaurin, onafhankelijk van elkaar, gevonden rond 1735. Een bewijs kan gevonden worden in Apostol's *An Elementary View of Euler's Summation Formula* [10].

experimenten [12, 13, 14] geweest om het te testen. Echter om het effect te kunnen testen, zullen er enkele aanpassingen aan formule (3.24) gemaakt moeten worden. Om te beginnen wordt het in SI eenheden gemeten, dus zullen de constanten \hbar en c , die we op 1 hadden gesteld, weer terug in de formule moeten komen. We krijgen dan

$$\frac{F}{a^2} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240} \frac{1}{L^4}. \quad (3.28)$$

waar \hbar volgt uit dat de energie gelijk is aan $E = \frac{1}{2} \sum \hbar \omega$ en c krijgen we doordat $\omega = ck$. Andere aanpassingen zijn afhankelijk van het experiment (denk bijvoorbeeld aan thermische afwijkingen). De kracht is een functie die afvalt met $\frac{1}{L^4}$ en daarom zal de kracht snel naar 0 gaan. Om toch een kracht te meten wordt er gewerkt in een orde van $L \sim 1 \mu\text{m}$, als de platen dan een oppervlakte hebben van $a \sim 1 \text{ cm}^2$, dan zien we dat de kracht in de orde van $F \sim 10^{-7} \text{ N}$ zit. We zien meteen dat zowel de afstand tussen de platen met hoge precisie gemeten moet worden, als dat de kracht zeer gevoelig gemeten moet worden om het experiment met de theoretische waarden te kunnen vergelijken. Naast deze metingen is het ook belangrijk dat het gebruikte materiaal aan bepaalde eisen voldoet [15, 16]:

- Schone platen, zonder onzuiverheden, zowel chemisch als stof, zodat de velden op de platen nul zijn om aan de randcondities te voldoen;
- Precieze en reproduceerbare metingen, vooral belangrijk als het gaat om de afstand tussen de platen;
- Lage electrostatistische ladingen op het oppervlak van de platen en een laag potentiaal verschil tussen de platen. Aangezien het om kleine krachten gaat is het zeer belangrijk om precies te weten wat de systematische fout is door achtergebleven lading op de platen.

Doordat al deze condities al op zich vrij lastig zijn, wordt het helemaal lastig om dit allemaal voor elkaar te krijgen. Het is dan ook niet zo verbazingwekkend dat het eerste experiment uitgevoerd door M. J. Sparnaay [15] niet volledig lukte, maar hij gaf wel een eerste indicatie dat er een kracht was tussen twee metalen platen. Verder gaf hij aan waar de problemen zitten om een betere meting te kunnen doen.

De eerste die een duidelijk resultaat had was S. K. Lamoreaux [12], hij wist het Casimir effect te meten met 95% zekerheid waarbij $0.6 \mu\text{m} < L < 6 \mu\text{m}$. Er werd gebruik gemaakt van een sferische lens en een vlakke plaat. De kracht (3.28) verandert door gebruik te maken van de sferische lens in

$$F_c = -2\pi R \left(\frac{1}{3} \frac{\pi^2 \hbar c}{240} \frac{1}{L^3} \right) \quad (3.29)$$

en deze formule moet nog aangepast worden vanwege thermische effecten waardoor we de functie

$$F_c^T = F_c \left(1 + \frac{720}{\pi^2} f(\xi) \right) \quad (3.30)$$

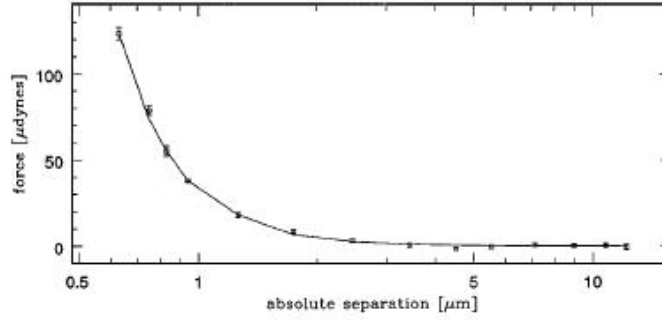
krijgen, waarbij $\xi = \frac{kTL}{\hbar c}$ en k is de constante van Boltzmann. De functie $f(\xi)$ is dan vervolgens

$$f(\xi) \approx \begin{cases} \frac{\xi^3}{2\pi} \zeta(3) - \frac{\xi^4 \pi^2}{45} & \text{for } \xi \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{\xi}{8\pi} \zeta(3) - \frac{\pi^2}{720} & \text{for } \xi > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.31)$$

waarbij $\zeta(x)$ de Riemann zeta functie (3.25) is. Vervolgens is er een formule opgesteld om deze theoretische voorspelling te testen

$$F_c^m = (1 + \delta) F_c^T + b' \quad (3.32)$$

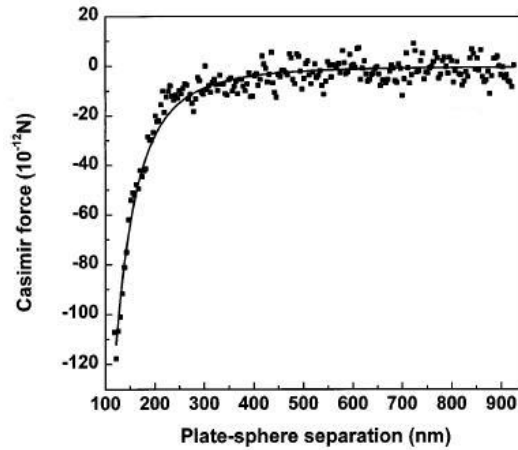
waarbij in het optimale geval $b' = \delta = 0$ en F_c^m de gemeten kracht is en waarbij systematische



Figuur 3.2: Een grafiek waarin de (absolute waarde van de) gemeten kracht in μdyn wordt uitgezet tegen de afstand tussen de sferische lens en de plaat in μm en de lijn is de theoretische verwachting.

fouten al verwerkt zijn. De δ is gebruikt om de precisie van het experiment te bepalen. Uiteindelijk waren de gevonden waarden $b' < 5 \cdot 10^{-7} \text{ dyn}$ en $\delta = 0.01 \pm 0.05$. Het eindresultaat is te zien in grafiek 3.2. We zien dat het experiment opvallend goed klopt met de theoretische verwachting.

Waar Lamoreaux niet verder dan $0.6 \mu\text{m}$ wist te komen, kwamen U. Mohideen en A. Roy [13] tot $0.1 \mu\text{m}$. Daarvoor gebruikten zij een metalen bol met een diameter van $196 \mu\text{m}$ en een vlakke plaat en gebruikten ze een laser om de kracht te meten. Hiermee wisten ze een hoge precisie te behalen. Ze maakten gebruik van dezelfde gemodificeerde theoretische Casimir formule (3.30) als Lamoreaux³ en voor de gemeten waarden gebruikten ze $(F_c)_m = F_m - B/D - Cd - E$ waarbij F_m de gemeten kracht is en de overige termen systematische fouten zijn die van de gemeten waarde worden afgetrokken. Het uiteindelijke resultaat dat ze kregen is te zien in 3.3. We zien dat het experiment goed overeen komt met de theoretische curve.



Figuur 3.3: Een grafiek waarin de kracht uitgezet is tegenover de afstand tussen de platen. De curve is de theoretische Casimir kracht.

We zien dus dat het Casimir effect getest is door middel van meerdere experimenten en dat met vrij hoge precisie vastgesteld is dat het effect er wel degelijk is. Doordat dit effect verklaard wordt door de quantumfluctuaties, tussen de platen is er een iets andere energie aanwezig dan buiten de platen, lijkt het er op te wijzen dat het vacuüm energie bestaat. Nu is het de vraag waarom de energie theoretisch gezien zo ontzettend groot is, terwijl dit niet klopt met waarnemingen.

³alleen definiëren Mohideen en Roy deze functie als F_c i.p.v. F_c^T zoals Lamoreaux.

3.4 Discussie over het Casimir effect

Ondanks dat het Casimir effect vaak wordt gezien als het bewijs van het bestaan van de vacuüm energie in velden theorie, is het mogelijk om het Casimir effect ook op een andere manier te verklaren. Dit is o.a. gedaan door Jaffe [17] en Schwinger [18, 19]. Dus ondanks dat het Casimir effect bestaat en bewezen is, is het niet duidelijk of dit betekent dat het bestaan van de vacuüm energie daarmee aangetoond is.

Hoofdstuk 4

Gravitatie en de kosmologische constante

In quantumveldentheorie kunnen we het oneindige vacuüm energie (2.53) vaak gelijk aan 0 stellen, we kijken alleen naar energie verschillen. Zodra gravitatie een rol gaat spelen, kan dit niet meer, omdat dan de energie bijdraagt aan de kromming van de ruimte-tijd. Een oneindige energie zou een oneindig gekromde ruimte-tijd betekenen, iets wat wij niet waarnemen. Deze vacuüm energie wordt gekoppeld aan de kosmologische constante. We zien uit (2.47) dat de vacuüm energiedichtheid divergeert met $\sim k^4$, door middel van een cutoff kunnen we een waarde aan de energiedichtheid geven van $\sim 10^{74}$ GeV⁴. Uit recente waarnemingen [20] is echter gebleken dat de gevonden energiedichtheid een waarde van $\sim 10^{-48}$ GeV⁴ heeft. Verder kijken we naar de kosmologische gevolgen, met o.a. de Einstein vergelijking, de Friedmann vergelijking en we introduceren de Robertson-Walker metriek. Er zal gewerkt worden in een vlakke ruimte¹, dat wil zeggen $\kappa = 0$ in de formules [21] voor een 3 dimensionele ruimte.

$$ds^2 = dr^2 + S_\kappa^2 d\Omega^2 \quad (4.1)$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \quad (4.2)$$

$$S_\kappa = \begin{cases} R \sin(r/R) & \kappa = 1 \\ r & \kappa = 0 \\ R \sinh(r/R) & \kappa = -1 \end{cases} \quad (4.3)$$

In een vlakke ruimte geldt dus $ds^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2$ en in cartesische coördinaten betekent dat $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

4.1 De actie functionaal met gravitatie

We bekijken de actie (2.7) hier nogmaals, aangezien deze actie poincaré invariant is.

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \frac{1}{2} \int d^4x \mathcal{L} \\ \mathcal{L} &= \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - V(\phi) \\ V(\phi) &= m^2 \phi^2 \end{aligned}$$

Deze actie geldt voor een vrij scalar veld, nu willen we hier gravitatie aan toevoegen. Gravitatie zorgt voor een gekromde ruimte-tijd, dus om te beginnen willen we een actie hebben in een algemene covariante vorm, omdat we dan een actie hebben die onafhankelijk is van de keuze van

¹Dit komt overeen met gefitte data van WMAP [23], zodat we specifiek dit model kunnen bekijken.

coördinaten en de fysica niet af mag hangen van de keuze van coördinaten. Om ervoor te zorgen dat deze poincaré invariante actie in een algemene covariante vorm komt, moeten we dus enkele aanpassingen maken.

- We vervangen de Minkowski metriek $\eta^{\mu\nu}$ door een algemene metriek $g^{\mu\nu}$. Dit is een triviale stap, als er een gekromde ruimte-tijd is, geldt de Minkowski metriek niet meer. Aangezien energie ervoor zorgt dat de ruimte-tijd kromt en energie is gelijk aan massa, zien we dat de Minkowski metriek eigenlijk alleen geldt voor een lege ruimte-tijd.
- De afgeleides ∂_μ worden vervangen door covariante afgeleides ∇_μ , dit omdat ∂_μ geldt in een cartesische coördinaten systeem, maar in een algemene theorie kan je ook in andere coördinaat systemen werken en daarvoor wordt de covariante afgeleide ∇_μ ingevoerd. Echter, omdat we hier te maken hebben met een scalar veld, geldt $(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) = (\nabla_\mu\phi)(\nabla^\mu\phi)$.
- Het vervangen van het volume element d^4x . Dit volume element geldt voor de Minkowski ruimte, om een algemeen volume element te krijgen gebruik je $d^4x\sqrt{-g}$ waarbij $g \equiv \det g_{\mu\nu}$. Het min teken staat in de wortel omdat de determinant van de metriek tensor negatief is.

Door deze veranderingen in te voeren krijgen we een algemene covariante actie uit een poincaré invariante actie. De nieuwe actie beschrijft een scalar veld die gekoppeld is met gravitatie; de metriek tensor $g^{\mu\nu}$ en de covariante afgeleides zorgen voor deze koppeling. De algemene covariante actie van een scalar veld is, met behulp van de actie (2.7)

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} (\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - V(\phi)]. \quad (4.4)$$

Deze vorm van koppeling met gravitatie heet minimale koppeling, dit omdat het de minimale koppeling beschrijft met gravitatie die nodig is om de algemene relativiteitstheorie te kunnen gebruiken. Er zijn ook andere vormen van koppeling met gravitatie, hierdoor komen er meestal extra termen bij in de Lagrangiaan. Extra termen in de Lagrangiaan moeten echter wel gerechtvaardigd zijn en maken de theorie ook extra gecompliceerd, daarom houden we het bij de actie met de minimale koppeling (4.4).

4.2 De Einstein vergelijkingen

4.2.1 De geodeet en het Christoffel symbool

Stel, we hebben een deeltje dat een bepaald pad door de ruimte volgt. Het pad dat gevolgd wordt is afhankelijk van de kromming van de ruimte-tijd. In het geval van de Minkowski ruimte-tijd betekent dit dat een deeltje continu in dezelfde richting zal gaan tenzij er een kracht op werkt. Andere metrieken hebben echter wel met krommingen te maken. Een geodeet is het pad dat een deeltje volgt zonder dat er krachten op werken; het is alleen afhankelijk van de metriek. Hiervoor gebruiken we de tweede wet van Newton, $\vec{F} = m\vec{a} = 0$, waaruit volgt dat $\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{x} = 0$. Deze wet generaliseren we naar de vier dimensionale ruimte-tijd en doordat $x^0 = t$ kiezen we een andere parameter dan de tijd, namelijk τ . Hierdoor krijgen we in de Minkowski ruimte-tijd dat

$$\frac{d^2}{d\tau^2}x^\mu = 0. \quad (4.5)$$

We gaan nu over naar een andere ruimte-tijd, hierbij maken we gebruiken van de notatie zoals bij een Lorentz transformatie (appendix A)

$$\frac{d}{d\tau}x^\mu = \Lambda^\mu_{\nu} \frac{d}{d\tau}x'^\nu; \quad (4.6)$$

$$\Lambda^\mu_{\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \quad (4.7)$$

waarbij Λ'^μ_ν de transformatie matrix is. Hierdoor krijgen we een verhouding tussen de oude en de nieuwe coördinaten

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{d}{d\tau} x^\mu \right] = \frac{d}{d\tau} \left[\Lambda'^\mu_\nu \frac{d}{d\tau} x'^\nu \right]. \quad (4.8)$$

Stel dat de nieuwe coördinaten lineair afhankelijk zijn van de oude coördinaten, dan zal de afgeleide van de transformatie matrix verdwijnen, waardoor geldt

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{d}{d\tau} x'^\nu \right] = 0 \quad (4.9)$$

zoals we zouden verwachten bij een Lorentz transformatie, echter als de nieuwe basis niet lineair afhankelijk is van de oude basis, dan gebruiken we

$$\frac{d}{d\tau} \Lambda'^\mu_\nu = \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right] = \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left[\frac{d}{d\tau} x^\mu \right] \quad (4.10)$$

waarbij we vergelijking (4.6) er weer in kunnen stoppen zodat we het volgende krijgen

$$\frac{d}{d\tau} \Lambda'^\mu_\nu = \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left[\Lambda'^\mu_\alpha \frac{d}{d\tau} x'^\alpha \right] = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\alpha} \frac{d}{d\tau} x'^\alpha. \quad (4.11)$$

Let op dat we al een variabele ν hebben zodat de sommatie over α is. Vervolgens gebruiken we vergelijking (4.8) om de totale afgeleide te berekenen van de nieuwe coördinaten

$$\frac{d}{d\tau} \left[\Lambda'^\mu_\nu \frac{d}{d\tau} x'^\nu \right] = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\alpha} \frac{d}{d\tau} x'^\alpha \frac{d}{d\tau} x'^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{d^2}{d\tau^2} x'^\nu = 0. \quad (4.12)$$

Nu willen we de term met de tweede tijdsafgeleide isoleren, daarvoor moeten we de vergelijking vermenigvuldigen met de inverse van de transformatie matrix (zie appendix A) Λ'^ν_μ . Echter doordat we al een sommatie hebben over ν , veranderen we de variabele naar β .

$$\frac{d^2}{d\tau^2} x'^\beta + \left[\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\alpha} \right] \frac{d}{d\tau} x'^\alpha \frac{d}{d\tau} x'^\nu = 0 \quad (4.13)$$

Hieruit krijgen we de vergelijking

$$\frac{d^2}{d\tau^2} x'^\beta = -\Gamma_{\nu\alpha}^\beta \frac{d}{d\tau} x'^\alpha \frac{d}{d\tau} x'^\nu; \quad (4.14)$$

$$\Gamma_{\nu\alpha}^\beta = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\alpha} \quad (4.15)$$

waarbij $\Gamma_{\nu\alpha}^\beta$ het Christoffel symbool is en dit is een tensor met rank drie. Het Christoffel symbool kan ook berekend worden met de conditie dat de covariante afgeleide (appendix A) van de metriek gelijk is aan nul.

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta g_{\beta\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta g_{\mu\beta} \quad (4.16)$$

$$\nabla_\mu g_{\nu\alpha} = \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^\beta g_{\beta\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta g_{\nu\beta} \quad (4.17)$$

$$\nabla_\nu g_{\alpha\mu} = \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta g_{\beta\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\beta g_{\alpha\beta} \quad (4.18)$$

Door de tweede en derde vergelijking van de eerste af te trekken krijgen we

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta g_{\beta\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta g_{\mu\beta} - \partial_\mu g_{\nu\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta g_{\beta\alpha} + \Gamma_{\mu\alpha}^\beta g_{\nu\beta} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} + \Gamma_{\nu\alpha}^\beta g_{\beta\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^\beta g_{\alpha\beta} = 0 \quad (4.19)$$

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\mu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^\beta g_{\beta\alpha} = 0 \quad (4.20)$$

waarbij gebruik is gemaakt dat zowel het Christoffel symbool als de metriek tensor symmetrische tensoren zijn (de onderste indices kunnen verwisseld worden zonder dat het resultaat verandert). Hieruit volgt dan

$$2\Gamma_{\mu\nu}^{\beta}g_{\beta\alpha} = -\partial_{\alpha}g_{\mu\nu} + \partial_{\mu}g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu}g_{\alpha\mu} \quad (4.21)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta}g_{\beta\alpha}g^{\gamma\alpha} = \Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} = \frac{1}{2}g^{\gamma\alpha}[\partial_{\nu}g_{\alpha\mu} + \partial_{\mu}g_{\nu\alpha} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}] \quad (4.22)$$

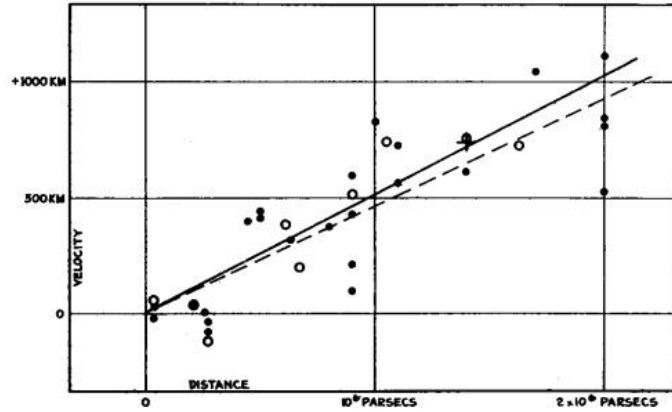
Dus het Christoffel symbool is afhankelijk van de gekozen metriek en kan ook genoteerd worden als

$$\Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\alpha}} = \frac{1}{2}g^{\beta\mu}[\partial_{\alpha}g_{\nu\mu} + \partial_{\nu}g_{\alpha\mu} - \partial_{\mu}g_{\nu\alpha}] \quad (4.23)$$

waarbij we nu een uitdrukking hebben die compleet metriek afhankelijk is.

4.2.2 Het expanderende universum

Tot nu toe hebben we continu gewerkt met de Minkowski metriek $\eta_{\mu\nu}$ (A.9). Materie zorgt ervoor dat de ruimte-tijd kromt en deze ruimte-tijd vertelt materie weer hoe deze door de ruimte-tijd heen beweegt, bij het beschrijven van het universum met gravitatie zagen we al dat de Minkowski metriek niet voldoet. Hubble stelde al rond 1930 vast dat het heelal expandeert door metingen aan objecten die ver weg van ons staan. In figuur 4.1 is de plot te zien die Hubble maakte aan de



Figuur 4.1: Hubble's originele grafiek met snelheid op de verticale as en afstand op de horizontale as. Let op dat het een mooie lineaire lijn oplevert en dat de snelheid per ongeluk uitgedrukt is in km in plaats van km s^{-1} . Hieruit haalde Hubble een constante van $500 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$

hand van zijn gegevens. We zien een lineaire lijn lopen, wat betekent dat de snelheid / afstand een constante oplevert en de Hubble wet die hieraan gekoppeld werd is dan

$$v = H_0 d \quad (4.24)$$

waarin v de snelheid is (in km s^{-1}), H_0 de Hubble constante (in $\text{km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$) en d de afstand van het object (in Mpc). De notatie voor de Hubble constante is H_0 omdat dit de Hubble parameter $H(t)$ is met $t = t_0$, waarbij t_0 de tijd is waarop de observatie gedaan is. Zoals te zien is in de grafiek zag Hubble een constante van ongeveer $500 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Een meer recente meting [23] uit 2003 met WMAP geeft een Hubble constante van $H_0 = 72 \pm 5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Het heelal zet dus uit, om dit te beschrijven hebben we een nieuwe metriek nodig. Robertson en Walker hebben, onafhankelijk van elkaar, een metriek opgesteld waarmee de ruimte-tijd beschreven kan worden voor een homogeen en isotroop universum (het universum kan zo beschouwd worden, het

is echter niet helemaal correct, maar goed genoeg in ons geval) dat expandeert. De metriek die ze gevonden hebben noemen we de Friedmann-Robertson-Walker metriek² (ook wel FRW metriek).

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [dr^2 + S_\kappa^2 d\Omega^2] \quad (4.25)$$

waarbij $d\Omega^2$ in formule (4.2) gedefiniëerd staat en S_κ in (4.3). Aangezien we aannemen dat we in een vlakke ruimte werken, waarbij geldt dat $\kappa = 0$, krijgen we de volgende Friedmann-Robertson-Walker metriek.

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [dx^2 + dy^2 + dz^2] \quad (4.26)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t) \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Let op dat nu niet meer geldt dat de inverse van de metriek gelijk is aan de metriek, maar

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a^2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2(t)} \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

waarbij $a(t)$ de schaal factor is, die aangeeft hoe snel het universum expandeert. Met deze metriek kan vervolgens de componenten van het Christoffel symbool bekeken worden.

4.2.3 Het Christoffel symbool en de FRW metriek

Voor we de stap maken naar de Einstein vergelijkingen, bekijken we eerst het Christoffel symbool (A.26) als we als metriek de FRW metriek (4.27) nemen. We kunnen alle componenten van het Christoffel symbool bekijken, eerst schrijven we de componenten van de FRW metriek op.

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu = 0 \\ -a^2(t) & \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases} \quad (4.29)$$

Er zijn dus maar vier termen in de FRW metriek, we kunnen noteren dat $g_{00} = 1$ en $g_{ij} = -\delta_{ij}a^2(t)$. Als Christoffel symbool wordt $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ gebruikt.

Stel, $\alpha = 0$, dan volgt daaruit

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2}g^{0\beta} [\partial_\nu g_{\mu\beta} + \partial_\mu g_{\nu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}] \quad (4.30)$$

en we zien dat er alleen een waarde is als $\beta = 0$, als $\beta \neq 0$, dan krijgen we g^{0i} en deze is 0 voor alle i .

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2}g^{00} [\partial_\nu g_{\mu 0} + \partial_\mu g_{\nu 0} - \partial_0 g_{\mu\nu}] \quad (4.31)$$

Er zijn nu vijf mogelijkheden; $\mu = \nu = 0$, $\mu = 0 \neq \nu$, $\nu = 0 \neq \mu$, $\mu = \nu \neq 0$ en $\mu \neq \nu \neq 0$. Stel $\mu = \nu = 0$, dan zien we meteen dat alle termen tussen de haken $\partial_0 g_{00}$ worden en aangezien $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial t}$ en g_{00} geen tijdafhankelijk heeft, worden alle termen nul en zien we dus dat $\Gamma_{00}^0 = 0$. Stel dat $\mu = 0 \neq \nu$, hieruit volgt dat

$$\Gamma_{0i}^0 = \frac{1}{2}g^{00} [\partial_i g_{00} + \partial_0 g_{i0} - \partial_0 g_{0i}]. \quad (4.32)$$

²Soms noemt men het de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metriek, afgekort FLRW.

De termen g_{0i} en g_{i0} zijn nul en aangezien $\partial_i g_{00} = \frac{\partial}{\partial x^i} g_{00}$ is deze term ook nul, waardoor $\Gamma_{0i}^0 = 0$, we zien meteen dat als $\nu = 0 \neq \mu$ de termen van Γ_{i0}^0 overeen komen met die van Γ_{0i}^0 , dus die vallen ook allemaal weg, waardoor $\Gamma_{i0}^0 = 0$.

De situaties $\mu = \nu \neq 0$ en $\mu \neq \nu \neq 0$ bekijken we in een keer door ze verschillende indices te geven en de situaties $i = j$ en $i \neq j$ te bekijken, hierdoor krijgen we

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2} g^{00} [\partial_j g_{i0} + \partial_i g_{j0} - \partial_0 g_{ij}] \quad (4.33)$$

De eerste twee termen tussen de haken vallen weg, omdat $g_{i0} = g_{j0} = 0$, de laatste term daarentegen is $g_{ij} = -\delta_{ij} a^2(t)$ en is afhankelijk van de tijd, waardoor de tijdsafgeleide van g_{ij} gelijk is aan $\partial_0 g_{ij} = -2\delta_{ij} a(t)\dot{a}(t)$.

Dan gaan we nu de $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ berekenen als $\alpha = i$.

$$\Gamma_{\mu\nu}^i = \frac{1}{2} g^{i\beta} [\partial_\nu g_{\mu\beta} + \partial_\mu g_{\nu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}] \quad (4.34)$$

We zien direct dat als $\beta = 0$, dat de hele functie direct 0 wordt, dus we stellen $\beta = j$.

$$\Gamma_{\mu\nu}^i = \frac{1}{2} g^{ij} [\partial_\nu g_{\mu j} + \partial_\mu g_{\nu j} - \partial_j g_{\mu\nu}] \quad (4.35)$$

Ook nu zijn er weer verschillende mogelijkheden: $\mu = \nu = 0$, $\mu = 0 \neq \nu$, $\nu = 0 \neq \mu$ en $\mu = k$, $\nu = l$ waarbij $k = l$ of $k \neq l$.

Stel $\mu = \nu = 0$, de enige term die niet gelijk 0 wordt, is $\partial_j g_{00}$, echter de afgeleide van 1 is 0, dus $\Gamma_{00}^i = 0$. Nu bekijken we $\mu = 0 \neq \nu$, waaruit volgt

$$\Gamma_{0k}^i = \frac{1}{2} g^{ij} [\partial_k g_{0j} + \partial_0 g_{kj} - \partial_j g_{0k}] \quad (4.36)$$

en de enige term die ongelijk aan 0 is $\partial_0 g_{kj}$ (als $k = j$), waardoor we krijgen dat $\Gamma_{0k}^i = -\delta_{ij} \frac{1}{2a^2(t)} [-2\delta_{kj} a(t)\dot{a}(t)]$ waaruit volgt dat $\Gamma_{0k}^i = \delta_{ik} \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$. De situatie $\nu = 0 \neq \mu$ is equivalent aan $\mu = 0 \neq \nu$, waaruit volgt dat $\Gamma_{0k}^i = \Gamma_{k0}^i = \delta_{ik} \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$. Stel nu dat $\mu = k$, $\nu = l$, dan krijg je

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{ij} [\partial_l g_{kj} + \partial_k g_{lj} - \partial_j g_{kl}]. \quad (4.37)$$

We weten dat $g_{kj} = -\delta_{kj} a^2(t)$, echter er is alleen een tijdafhankelijkheid, geen ruimte, dus een partiële afgeleide naar een van de ruimtelijke coördinaten wordt 0, dus $\Gamma_{kl}^i = 0$. Nu hebben we een volledige set vergelijkingen voor het Christoffel symbool in de FRW ruimte-tijd, deze zijn handig om te gebruiken in de Einstein vergelijkingen.

$$\Gamma_{kl}^i = \begin{cases} \Gamma_{00}^0 = & 0 \\ \Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{i0}^0 = & 0 \\ \Gamma_{ij}^0 = & \delta_{ij} a(t)\dot{a}(t) \\ \Gamma_{00}^i = & 0 \\ \Gamma_{0k}^i = \Gamma_{k0}^i = & \delta_{ik} \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \\ \Gamma_{kl}^i = & 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

Opvallend aan deze set vergelijkingen is dat er alleen een waarde voor een Christoffel symbool in de FRW ruimte-tijd is als er twee ruimte coördinaten in staan en een tijd coördinaat.

4.2.4 De Einstein vergelijkingen

De Einstein vergelijking is af te leiden door een algemene actie op te stellen voor het veld ϕ dat gekoppeld is met de zwaartekracht, dus afhankelijk is van de metriek tensor $g_{\mu\nu}$. en vervolgens

een functionele afgeleide te nemen naar $g^{\alpha\beta}$ en hiervan het extremum te berekenen. Een algemene covariante actie ziet er als volgt uit

$$S[\phi, g_{\mu\nu}] = S^{grav}[g_{\mu\nu}] + S^{mat}[\phi, g_{\mu\nu}] \quad (4.39)$$

waarin S^{grav} de actie is voor de gravitatie en S^{mat} is de actie voor materie (de koppeling met gravitatie hoeft niet minimaal te zijn). De simpelste actie voor de gravitatie is de Einstein-Hilbert actie

$$S^{grav} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (4.40)$$

waarin G Newton's constante is, R is de Ricci scalar. Doordat de Ricci scalar ook geschreven kan worden als $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ is de functionele afgeleide van de Einstein-Hilbert actie gelijk aan

$$\frac{\delta S^{grav}}{\delta g^{\alpha\beta}} = -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} \left[R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \right] = 0. \quad (4.41)$$

Nu kan de Einstein vergelijking afgeleid worden door de functionele afgeleide van de totale actie (4.39), maar we gebruiken de Einstein vergelijking zodat we de energie-momentum tensor kunnen afleiden voor een bepaalde actie van materie S^{mat} . De Einstein vergelijking is

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 8\pi G T_{\alpha\beta} \quad (4.42)$$

waarin $G_{\alpha\beta}$ de Einstein tensor is, $R_{\alpha\beta}$ de Ricci tensor en $T_{\alpha\beta}$ de energie-momentum tensor. De Einstein vergelijking verteld ons dus dat de energie-momentum tensor de bron is van de kromming van de ruimtetijd. Door de functionele afgeleide naar $g^{\alpha\beta}$ te nemen van de actie (4.39), volgt hieruit dat de energie-momentum tensor gelijk is aan

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S^{mat}}{\delta g^{\alpha\beta}} \quad (4.43)$$

waardoor de energie-momentum tensor berekend kan worden afhankelijk van de actie van de materie. Nu nemen we de Einstein vergelijking (4.42) onder de loep, de Ricci tensor is afhankelijk van de metriek op de volgende manier.

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\mu}^\mu + \Gamma_{\nu\mu}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\nu - \Gamma_{\nu\beta}^\mu \Gamma_{\alpha\mu}^\nu \quad (4.44)$$

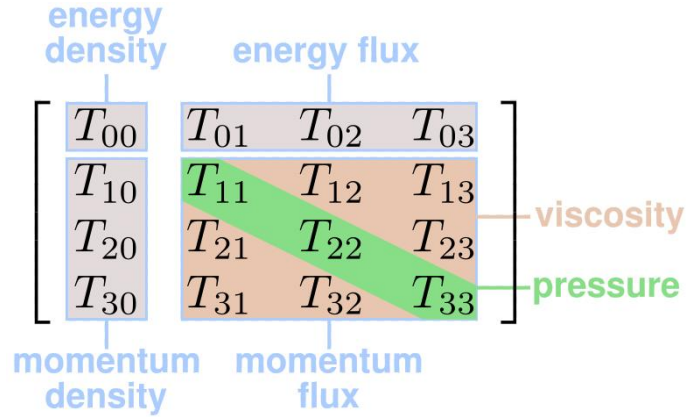
$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\partial_\beta g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha g_{\beta\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}] \quad (4.45)$$

waarin $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ het Christoffel symbool is die voor de FRW metriek al berekend is in sectie 4.2.3 en de uitkomst daarvan staat weergegeven in de set vergelijkingen (4.38). Nu is het ook mogelijk om de energie-momentum tensor te berekenen via de metriek in plaats van via de actie van materie.

4.3 De energie-momentum tensor

Er zijn dus twee manieren om de energie momentum tensor te berekenen. Eerst zal de energie-momentum tensor berekend worden door de Ricci tensor uit te werken met behulp van de Christoffel symbolen, hieruit volgt dat de T_{00} component als antwoord de zogenaamde Friedmann vergelijking geeft. De energie-momentum tensor heeft in totaal 16 componenten, elk van deze componenten geeft een eigenschap van de energie configuratie in het universum. Door de gekozen metriek zal het echter zo zijn dat er alleen elementen over blijven op het spoor, de overige elementen worden nul. We zijn hierdoor in staat om de energie-momentum tensor op te schrijven als een energie-momentum tensor van een perfecte vloeistof

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - p g_{\mu\nu} \quad (4.46)$$



Figuur 4.2: Energie-Momentum tensor

waarbij U_μ de snelheids viervector van de vloeistof is en $g_{\mu\nu}$ de gekozen metriek. Doordat we in het eigen frame zitten, zorgt de term $U_\mu U_\nu$ ervoor dat de eerste term alleen voor het eerste component, de energiedichtheid, telt. We zien dat we dus terugkrijgen wat we zouden verwachten, namelijk

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

dus alleen elementen op het spoor. Nu kunnen we de energie-momentum tensor berekenen voor de FRW universum, want uit (4.42) volgt

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi G} \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R \right) \quad (4.48)$$

en we weten dat de Ricci tensor en scalar berekend kunnen worden met behulp van (4.44) en de Christoffel symbolen staan al uitgewerkt in (4.38). Dit invullen geeft de zogenaamde Friedmann vergelijking.

4.3.1 De Friedmann vergelijking

Vanuit (4.44) kunnen we zowel R_{00} als R_{ij} vinden, vervolgens berekenen we de Ricci scalar door $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, waarin de metriek dus de FRW metriek is. Doordat het Christoffel symbool alleen tijdafhankelijk kan zijn, kan alleen een tijdsafgeleide ons een antwoord geven in de Ricci tensoren. Hieruit volgt

$$R_{00} = -\partial_0 \Gamma_{0\mu}^\mu - \Gamma_{\nu 0}^\mu \Gamma_{0\mu}^\nu = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad (4.49)$$

$$R_{ij} = \partial_0 \Gamma_{ij}^0 + \Gamma_{0k}^k \Gamma_{ij}^0 - \Gamma_{kj}^0 \Gamma_{i0}^k - \Gamma_{0j}^k \Gamma_{ik}^0 = \delta_{ij} (\ddot{a}a + 2\dot{a}^2). \quad (4.50)$$

Met behulp van deze Ricci tensoren kunnen we de Ricci scalar berekenen, want dat is dan

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_{00} - \frac{1}{a^2(t)} \delta^{ij} R_{ij} \quad (4.51)$$

$$= -3 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{3}{a^2(t)} (\ddot{a}a + 2\dot{a}^2) = -6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right). \quad (4.52)$$

Let op dat hierboven gebruikt is dat $\delta^{ij}\delta_{ij} = 3$. Voor T_{00} volgt hieruit dan

$$T_{00} = \frac{1}{8\pi G} \left(R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R \right) = \frac{1}{8\pi G} \left[-3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \cdot 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \right] \quad (4.53)$$

$$T_{00} = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \quad (4.54)$$

en de verandering van de schaafactor ten opzichte van de schaafactor is gedefinieerd door de Hubble parameter $H(t)$, waaruit volgt dat $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$, waardoor we de formule om kunnen schrijven tot

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} T_{00}. \quad (4.55)$$

We weten echter dat deze component van de energie-momentum tensor gelijk is aan de energiedichtheid ρ waardoor we krijgen dat $T_{00} = g_{00}\rho$ en hieruit volgt dat

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \rho. \quad (4.56)$$

en dit resultaat is de bekende Friedmann vergelijking. Doordat de energiedichtheid ρ positief is, zegt deze formule ons dat het universum expandeert. Dit is de eerste vergelijking, we hebben ook nog een tweede vergelijking, namelijk

$$T_{ij} = \frac{1}{8\pi G} \left(R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R \right). \quad (4.57)$$

Vanuit de perfecte vloeistof vergelijking (4.46) zien we dat T_{ij} te schrijven is als $T_{ij} = -g_{ij}p$ en met de FRW metriek wordt dit dus $T_{ij} = \delta_{ij}a^2p$. Verder krijgen we, door het invullen van R_{ij} en R

$$\delta_{ij}a^2p = \frac{1}{8\pi G} \delta_{ij}a^2 \left(-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \quad (4.58)$$

en dit kunnen we herschrijven tot

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G p - \frac{1}{2}H^2(t) = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) \quad (4.59)$$

waarbij we gebruik maken van de Friedmann vergelijking (4.56) om de laatste vergelijking te verkrijgen. Deze vergelijking noemt men ook wel de versnellingsvergelijking, omdat deze de versnelling van het universum geeft. Deze twee vergelijkingen, die dus volgen uit de Einstein vergelijking met de aanname van de FRW metriek, spelen een centrale rol in de kosmologie, omdat deze ons vertellen hoe het universum zich gedraagt. Echter in de tijd van Einstein, toen men deze formules dus niet had, ging Einstein er zelf nog vanuit dat het universum statisch was, dus het expandeert niet en het krimpt niet ineen. Doordat Einstein zelf al zag dat uit zijn vergelijking volgde dat het universum niet statisch kon zijn voerde Einstein een nieuwe parameter in, namelijk de kosmologische constante Λ .

4.4 De kosmologische constante

Door deze kosmologische constante wist Einstein het universum statisch te maken. Deze kosmologische constante zette hij in zijn vergelijking, waardoor de Einstein vergelijking eruit zag als

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R - g_{\alpha\beta}\Lambda = 8\pi GT_{\alpha\beta}. \quad (4.60)$$

Door metingen van Hubble bleek dat het universum expandeert, waardoor de kosmologische constante geen waarde meer had en deze uit het model werd geschrapt. De kosmologische constante is later terug in het model gekomen nadat bleek dat het universum versneld expandeert, dus $\frac{\ddot{a}}{a} > 0$,

dit zal zo aan bod komen. Eerst gaan we bekijken wat de bijdrage van de kosmologische constante aan de energie-momentum tensor is, dit doen we door de kosmologische constante naar de rechterkant van de vergelijking te halen waardoor we krijgen

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 8\pi GT_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\Lambda \quad (4.61)$$

waardoor we de kosmologische constante als een onderdeel van de energie-momentum tensor kunnen noteren als $T_{\alpha\beta}^\Lambda = (8\pi G)^{-1}g_{\alpha\beta}\Lambda$ waaruit volgt

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 8\pi G(T_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}^\Lambda). \quad (4.62)$$

Als we deze energie-momentum tensor vergelijken met die van een perfecte vloeistof (4.46), dan volgt daaruit dat de energiedichtheid gelijk is aan $\rho_\Lambda = (8\pi G)^{-1}\Lambda$ en dus positief is als Λ positief is³ en de druk is gelijk aan $p_\Lambda = -(8\pi G)^{-1}\Lambda$ en is dus negatief waaruit we dus de vergelijking krijgen

$$\rho_\Lambda = -p_\Lambda \quad (4.63)$$

en dit is een belangrijke eigenschap van de kosmologische constante. We zien dus dat de kosmologische constante een positieve energiedichtheid heeft waaruit volgt dat het een negatieve druk heeft. Nu kunnen we bekijken wat voor gevolgen dit heeft voor de expansie van het universum. Doordat de energiedichtheid positief is, expandeert het universum. Nu bekijken we de versnellingsvergelijking (4.59) waaruit volgt dat

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_\Lambda + 3p_\Lambda) \quad (4.64)$$

$$= \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda \quad (4.65)$$

en aangezien ρ_Λ positief is, is de versnelling van de expansie ook positief. Dus de kosmologische constante zorgt voor een versnelde expansie. Merk op dat als we de Friedmann vergelijking en de versnellingsvergelijking met elkaar gaan vergelijken, dat we dan krijgen

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda \quad (4.66)$$

en doordat $\rho_\Lambda = (8\pi G)^{-1}\Lambda$ zien we dus dat $\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(t) = \frac{\Lambda}{3}$. We kunnen nu een oplossing vinden voor de schaalfactor $a(t)$ en voor een expanderend universum vinden we dan

$$a(t) = a_0 \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda}t\right) = a_0 \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right) \quad (4.67)$$

en een universum met de FRW metriek waarin dit de schaalfactor is, noemen we een **de Sitter** universum. Een kosmologische constante zorgt dus voor een de Sitter⁴ universum, maar we kunnen ons afvragen wat deze kosmologische constante nou eigenlijk is. De kosmologische constante komt met alles overeen dat dezelfde eigenschappen heeft, dus eigenlijk waarvoor geldt dat $\rho = -p$.

4.4.1 Energie-momentum tensor van materie in het vacuüm

We gaan een stap terug en bekijken de energie-momentum tensor voor velden (4.43) en vullen de actie voor minimale koppeling (4.4) hiervoor in. Hieruit volgt de energie-momentum tensor voor velden

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} - V \right] \quad (4.68)$$

³ Λ kan zowel positief zijn als negatief, later zal blijken dat de kosmologische constante gekoppeld kan worden aan de energiedichtheid van het vacuüm en zoals we eerder zagen is deze positief, dus we gaan uit van een positieve Λ .

⁴de Sitter wordt ook wel afgekort met dS.

en doordat het veld ϕ door middel van mode expansie afhangt van de creatie en annihilatie operatoren (2.41) kunnen we berekenen hoe de energie-momentum tensor er in het algemeen uitziet en in het bijzondere geval van het vacuüm. In dit geval kiezen we voor het ('mostly minus') Minkowski metriek. We zagen al uit 4.2 en uit (4.47) dat de T_{00} component de energiedichtheid geeft en het spoor geeft ons de druk, te berekenen via T_{ij} aangezien de overige componenten nul zijn. De algemene functie voor de energiedichtheid ρ is

$$T_{00} = \partial_0 \phi \partial_0 \phi - g_{00} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V \right] \quad (4.69)$$

$$T_{00} = (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi + V \quad (4.70)$$

$$\rho = g^{00} T_{00} = \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi + V \quad (4.71)$$

en de algemene functie voor de druk p is dan

$$T_{ij} = \partial_i \phi \partial_j \phi - g_{ij} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V \right] \quad (4.72)$$

$$T_{ij} = \partial_i \phi \partial_j \phi + \delta_{ij} \left[\frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2} \delta^{kl} \partial_k \phi \partial_l \phi - V \right] \quad (4.73)$$

$$p = -\frac{1}{3} g^{ij} T_{ij} = \frac{1}{3} \delta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi + \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi - V \quad (4.74)$$

$$p = \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{6} \delta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi - V \quad (4.75)$$

waarbij $p = -\frac{1}{3} g^{ij} T_{ij}$ volgt uit de vergelijking van de perfecte vloeistof (4.46) door $g^{ij} T_{ij} = -g^{ij} g_{ij} p$ en $g^{ij} g_{ij} = 3$. Van hieruit kan zowel de energiedichtheid als de druk van het vacuüm berekend worden door middel van de verwachtingswaarden $\langle \rho \rangle$ en $\langle p \rangle$ en het veld ϕ zoals gedefinieerd in (2.41).

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{2} \langle (\partial_0 \phi)^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \delta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi \rangle + \langle V \rangle \quad (4.76)$$

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2} \langle (\partial_0 \phi)^2 \rangle - \frac{1}{6} \langle \delta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi \rangle - \langle V \rangle \quad (4.77)$$

Aangezien V een bepaalde, willekeurige potentiaal is weten we niet precies wat deze doet in het vacuüm, maar voor deze berekening is dat niet erg, de potentiaal zal gewoon blijven staan op deze manier. Nu is het interessant om te zien hoe de energiedichtheid en de druk zich gedragen in het vacuüm.

$$\partial_0 \phi = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}}{\sqrt{2\omega_k}} \left(-i\omega_k \hat{a}_{\vec{k}}^- e^{-i\omega_k t} + i\omega_k \hat{a}_{-\vec{k}}^+ e^{i\omega_k t} \right) \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} (\partial_0 \phi)^2 = & \int \int \frac{d^3 \vec{k} d^3 \vec{k}'}{(2\pi)^3} \frac{e^{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}}}{2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \left(-i\omega_k \hat{a}_{\vec{k}}^- e^{-i\omega_k t} + i\omega_k \hat{a}_{-\vec{k}}^+ e^{i\omega_k t} \right) \\ & \left(-i\omega_{k'} \hat{a}_{\vec{k}'}^- e^{-i\omega_{k'} t} + i\omega_{k'} \hat{a}_{-\vec{k}'}^+ e^{i\omega_{k'} t} \right) \end{aligned} \quad (4.79)$$

en in het vacuüm krijgen we alleen de bijdrage van $\langle \hat{a}_{\vec{k}}^- \hat{a}_{-\vec{k}'}^+ \rangle = \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'}$, de overige combinaties van de annihilatie en creatie operatoren vallen weg.

$$\langle (\partial_0 \phi)^2 \rangle = \int \int \frac{d^3 \vec{k} d^3 \vec{k}'}{(2\pi)^3} \frac{e^{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}}}{2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \omega_k \omega_{k'} \langle \hat{a}_{\vec{k}}^- \hat{a}_{-\vec{k}'}^+ \rangle e^{i(\omega_{k'} - \omega_k) t} \quad (4.80)$$

waarin $\omega_k = \sqrt{k^2}$, oftewel de absolute waarde van k . We krijgen dus alleen een bijdrage als $\vec{k} = -\vec{k}'$ door de delta functie. Hieruit volgt dat $\omega_k = \omega_{k'}$ en $e^{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}} = e^{i(\omega_{k'} - \omega_k) t} = 1$. We zien

alleen nog dat, doordat $\vec{k} = -\vec{k}'$, dat $d^3\vec{k} = -d^3\vec{k}'$ waaruit uiteindelijk volgt

$$\langle (\partial_0 \phi)^2 \rangle = - \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{2} \quad (4.81)$$

dus levert deze term een negatieve bijdrage. Hieruit volgt al dat je voor de andere term een positieve bijdrage verwacht⁵.

$$\partial_i \phi = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{2\omega_k}} i k_i \left(\hat{a}_{\vec{k}}^- e^{-i\omega_k t} + \hat{a}_{-\vec{k}}^+ e^{i\omega_k t} \right) \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} \delta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi = & - \int \int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3} \frac{e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}}}{2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \delta^{ij} k_i k'_j \left(\hat{a}_{\vec{k}}^- e^{-i\omega_k t} + \hat{a}_{-\vec{k}}^+ e^{i\omega_k t} \right) \\ & \left(\hat{a}_{\vec{k}'}^- e^{-i\omega_{k'} t} + \hat{a}_{-\vec{k}'}^+ e^{i\omega_{k'} t} \right) \end{aligned} \quad (4.83)$$

Voor het vacuüm zal, zoals we eerder zagen, alleen een bijdrage komen van $\langle \hat{a}_{\vec{k}}^- \hat{a}_{-\vec{k}'}^+ \rangle = \delta_{\vec{k}, -\vec{k}'}$.

$$\langle \delta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi \rangle = - \int \int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3} \frac{e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}}}{2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \delta^{ij} k_i k'_j \langle \hat{a}_{\vec{k}}^- \hat{a}_{-\vec{k}'}^+ \rangle e^{i(\omega_{k'} - \omega_k) t} \quad (4.84)$$

Nu bekijken we de term $\delta^{ij} k_i k'_j$, deze levert alleen iets op als $i = j$, dan hebben we echter één component van de vector, voor de volledige vector die uit drie componenten bestaat vermenigvuldigen we met drie. Deze term kunnen we ook meteen opschrijven als $\omega_k \omega_{k'}$, waaruit volgt

$$\langle \delta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi \rangle = -3 \int \int \frac{d^3\vec{k} d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3} \frac{e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}}}{2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \omega_k \omega_{k'} \langle \hat{a}_{\vec{k}}^- \hat{a}_{-\vec{k}'}^+ \rangle e^{i(\omega_{k'} - \omega_k) t} \quad (4.85)$$

en doordat we nu alleen een bijdrage hebben wanneer $\vec{k} = -\vec{k}'$ krijgen we

$$\langle \delta^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi \rangle = 3 \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{2} \quad (4.86)$$

doordat $\omega_k = \omega_{k'}$ en $e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}} = e^{i(\omega_{k'} - \omega_k) t} = 1$ en $d^3\vec{k} = -d^3\vec{k}'$ hier ook van toepassing zijn. We zien dus dat we inderdaad een positieve bijdrage krijgen zoals verwacht. Nu kunnen we de vergelijkingen (4.76) en (4.77) oplossen waaruit volgt

$$\langle \rho \rangle = - \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{4} + 3 \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{4} + \langle V \rangle \quad (4.87)$$

$$\langle p \rangle = - \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{4} - \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{4} - \langle V \rangle \quad (4.88)$$

en hierdoor krijgen we de het volgende

$$\langle \rho \rangle = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{2} + \langle V \rangle \quad (4.89)$$

$$\langle p \rangle = - \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{2} - \langle V \rangle \quad (4.90)$$

waarbij $\langle \rho \rangle$ overeen komt met wat we al eerder hadden gevonden (2.46) en wat verder meteen opvalt is dat in het vacuüm geldt dat $\langle \rho \rangle = -\langle p \rangle$ en dit hebben we eerder gezien, namelijk bij

⁵anders krijg je een negatieve energiedichtheid van het vacuüm, terwijl we eerder al hadden gevonden dat deze positief is!

de kosmologische constante (4.63). Dit betekent dus dat het vacuüm een bijdrage levert aan de kosmologische constante. Let trouwens op dat voor de algemene definities van ρ en p voor velden, (4.71) en (4.75), niet standaard geldt dat $\rho = -p$, dit geldt alleen voor het vacuüm waardoor het een bijdrage levert aan de kosmologische constante. Het is mogelijk dat er nog andere contributies zijn voor de kosmologische constante, echter het vacuüm zorgt theoretisch al voor een enorme bijdrage van zo'n $\rho_{\text{vac}} \sim 10^{74} \text{ GeV}^4$. Stel dat het vacuüm de enige bijdrage is aan de kosmologische constante, dan krijgen we dat $\rho_{\text{vac}} = \rho_{\Lambda}$ en $\Lambda = 8\pi G\rho_{\text{vac}}$. De kosmologische constante kan gemeten worden aan de hand van de expansie van het universum, waaruit volgt dat $\rho_{\Lambda} \sim 10^{-47} \text{ GeV}^4$ [20]. Dus als het vacuüm de enige contributie zou zijn, dan meten we dat $\rho_{\text{vac}} \sim 10^{-47} \text{ GeV}^4$ wat zo'n $\sim 10^{120}$ scheelt met de theoretische waarde. Het is niet ondenkbaar dat er nog andere contributies zijn voor de kosmologische constante, deze zouden dan bijna geheel wegvallen tegen het vacuüm, maar wat zouden deze contributies dan kunnen zijn? Dit is het zogenaamde cc probleem, waarom meten we zo'n kleine kosmologische constante. We zullen nu een aantal suggesties gaan bekijken die langs zijn geweest om dit probleem op te lossen. Het doel is om te laten zien hoe lastig dit probleem is.

Hoofdstuk 5

Suggesties voor een oplossing van het cc probleem

We hebben nu dus gezien dat de energiedichtheid van het vacuüm een bijdrage levert aan de kosmologische constante, echter de theoretische waarde van de energiedichtheid van het vacuüm is zo'n $\sim 10^{120}$ groter dan experimenteel gevonden is voor de kosmologische constante. Dit is een groot probleem en ondanks veel suggesties in de loop der tijd, is dit probleem nog altijd niet opgelost. Hier worden kort enkele suggesties toegelicht waaruit blijkt dat dit probleem erg lastig is.

Fine-tuning

Een eerste manier om van het probleem af te zien te komen is door middel van fine-tuning. Fine-tuning is het toevoegen van een constante zonder dat de fysische eigenschappen van het probleem veranderen. Hierdoor kunnen we de volgende functie definiëren

$$\Lambda_{\text{eff}} = \Lambda_0 + \Lambda_{\text{vac}} \quad (5.1)$$

waarin Λ_{eff} de effectieve kosmologische constante is, dat is de kosmologische constante die we kunnen meten, Λ_{vac} is de contributie van de energiedichtheid van het vacuüm aan de kosmologische constante en Λ_0 is een bepaalde constante die we in principe zelf mogen bepalen. Echter, als we nu ervoor zorgen dat Λ_0 precies die waarde heeft dat het bijna geheel wegvalt met Λ_{vac} zodat de effectieve kosmologische constante die overblijft in overeenstemming met de metingen is ($\Lambda_{\text{eff}} \sim 10^{-47} \text{ GeV}^4$), dan hebben we $\Lambda_0 \approx -\Lambda_{\text{vac}}$ en moet Λ_0 bovendien heel precies gedefiniëerd zijn. Dit lijkt echter toeval en zonder achterliggende fysische betekenis van Λ_0 lijkt dit geen oplossing te zijn.

Toch kan deze methode wel gebruikt worden, namelijk door Λ_0 een fysische betekenis te geven en vervolgens te kijken of dit wellicht tegen de contributie van het vacuüm wegvalt.

5.1 Supersymmetrie

Supersymmetrie is een theorie die zegt dat alle elementaire deeltjes een supersymmetrische partner hebben. Deze theorie heeft twee varianten, de eerste variant is de ongebroken supersymmetrie, de tweede variant is de gebroken supersymmetrie. Bij de ongebroken supersymmetrie is er sprake van perfecte symmetrie en zoals dit al impliceert, zal de vacuüm energie wegvallen, dit kan ook kort [6] beredeneerd worden. Zonder te diep op de theorie achter supersymmetrie in te gaan, zijn er supersymmetrie generatoren Q_a en Q_a^\dagger (zoals de creatie en annihilatie operatoren in quantum mechanica of quantumveldentheorie) en in een ongebroken supersymmetrie kunnen deze op het

vacuüm $|0\rangle$ werken waardoor men krijgt

$$Q_a|0\rangle = Q_a^\dagger|0\rangle = 0 \quad (5.2)$$

wat erg op de creatie en annihilatie operatoren lijkt met dit verschil dat $a^+|0\rangle \neq 0$. Echter, de supersymmetrie generatoren hebben een commutatierelatie

$$[Q_a, Q_b^\dagger] \propto P^\mu \quad (5.3)$$

waarin P^μ de energie-momentum viervector is. In het vacuüm krijg je dus voor de energie-momentum viervector $\langle 0|P^\mu|0\rangle = 0$ en dus valt de energie weg bij een ongebroken symmetrie. Je kan het ook als volgt zien, bij een ongebroken symmetrie valt de contributie van de fermionen weg met de contributie van de bosonen, waardoor er nul overblijft. Er is ook een andere manier om dit te laten zien, namelijk door middel van de superpotential $W(\phi)$, echter het resultaat is hetzelfde, namelijk dat in de ongebroken supersymmetrie de vacuüm energiedichtheid (en dus de totale energie) nul wordt. Aangezien nul een stuk dichterbij het gezochte antwoord ligt dan de factor 10^{74} GeV^4 die we uit quantumveldentheorie hebben voor de energiedichtheid van het vacuüm, lijkt supersymmetrie een goede optie om dit probleem op te lossen. We komen echter in de problemen, want het blijkt dat de wereld waarin wij leven niet totaal uit een ongebroken supersymmetrie bestaat, de wereld heeft een gebroken supersymmetrie, alhoewel men verwacht dat de supersymmetrie toch ongebroken kan zijn vanaf $\sim 10^3 \text{ GeV}$ (als dit zo is dan zou men supersymmetrie kunnen ontdekken in de LHC). Supersymmetrie in een gebroken toestand zorgt ervoor dat de energiedichtheid van het vacuüm toch een bepaalde waarde heeft, $\rho_{\text{vac}} \neq 0$ en we verwachten dat de energiedichtheid zal gaan als $\rho_{\text{vac}} \sim \Lambda_{\text{Susy}}^4$, waarbij Λ_{Susy} de cutoff van supersymmetrie is, dus het moment waarop gebroken symmetrie verandert in ongebroken symmetrie, aangezien de ongebroken symmetrie geen bijdrage levert voor de energiedichtheid van het vacuüm. We zien dat de minimale cutoff van supersymmetrie dus $\Lambda_{\text{Susy}} \sim 10^3 \text{ GeV}$ is en dit levert nog steeds een veel te grote bijdrage op. Elke andere cutoff uit supersymmetrie kan alleen maar groter zijn dan de cutoff die hier gebruikt is, hierdoor lijkt supersymmetrie toch het probleem niet op te kunnen lossen.

Optimistische getallen

Ondanks dat supersymmetrie geen oplossing lijkt te bieden voor het probleem, wordt soms toch gesuggereerd dat supersymmetrie het probleem voor de helft oplost. Dit komt door de getallen optimistisch te bekijken. We weten namelijk dat de energiedichtheid gaat met $\rho_{\text{vac}} \sim \Lambda^4$ voor een gebruikte cutoff. We zagen al dat een cutoff bij de planck schaal zorgt voor een energiedichtheid van $\sim 10^{74} \text{ GeV}^4$, supersymmetrie zorgt dus voor een energiedichtheid van ongeveer $\sim 10^{12} \text{ GeV}^4$. Het verschil tussen planck schaal en de gemeten kosmologische constante is dus $\sim 10^{120} \text{ GeV}^4$, het verschil tussen supersymmetrie en de gemeten kosmologische constante is $\sim 10^{60} \text{ GeV}^4$. Een factor ~ 60 verschil, het verschil in de factor is dus door twee gedeeld en daarom wordt er soms gesuggereerd dat het probleem voor de helft opgelost is met behulp van supersymmetrie. Dit is echter puur numerologie, er zit verder geen verklaring achter en is alleen een observatie van de getallen.

Dit is overigens niet de enige poging om met behulp van de getallen dichterbij een oplossing te komen. Een poging om dichtbij het antwoord te komen is bijvoorbeeld met behulp van de fijnstructuur constante α [26]

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda_{\text{planck}}^4}{(2\pi^2)^3} \exp\left(-\frac{2}{\alpha}\right) \sim 10^{-123} \Lambda_{\text{planck}}^4 \quad (5.4)$$

waarbij de energiedichtheid dus ongeveer de orde van grootte krijgt die je op basis van experimenten zou verwachten. Let op dat dit nog steeds een observatie is zonder enige verklaring ervoor.

Nog een andere manier wordt gesuggereerd in [28] waarin de energiedichtheid van het vacuüm opgeschreven wordt als $\rho_{\text{vac}} \sim (10^{-12} \text{ GeV})^4$ en waarin opgemerkt wordt dat de verhouding tussen de cutoff van de planck schaal en supersymmetrie in de orde is van

$$\Lambda_c = \frac{\Lambda_{\text{Susy}}^2}{\Lambda_{\text{planck}}} \sim 10^{-12} \text{ GeV} \quad (5.5)$$

waardoor je dus de energiedichtheid van het vacuüm kan opschrijven in termen van de cutoff's van de supersymmetrie en van planck

$$\rho_{\text{vac}} \sim \left(\frac{\Lambda_{\text{Susy}}^2}{\Lambda_{\text{planck}}} \right)^4. \quad (5.6)$$

Dit is erg suggestief, het lijkt alsof een combinatie tussen die twee cutoff's ons verder kan helpen, echter we kunnen maar één cutoff invoeren, dus moet deze energie cutoff van $\Lambda_c \sim 10^{-12} \text{ GeV}$ opnieuw verklaard worden en een verklaring daarvoor is er simpelweg niet.

5.2 De dynamische kosmologische constante

Het idee hierachter is dat de kosmologische constante zorgt voor de versnelde expansie van het universum, echter de kosmologische constante heeft een tijdafhankelijkheid, waardoor de kosmologische constante in de loop der tijd steeds kleiner is geworden. Aangezien het universum zo'n $\sim 10^{10}$ jaar oud is, is de kosmologische constante onderhand heel klein geworden en dit zou verklaren waarom de effectieve kosmologische constante, die we dus meten, een hele kleine waarde heeft terwijl de theoretische kosmologische constante een hele grote waarde heeft, de waarde waarmee de kosmologische constante begon. Het voordeel van dit idee is dat het zowel een oplossing biedt voor de kosmologische constante als voor de inflatie. Er zijn meerdere manieren waardoor de kosmologische constante dynamisch kan zijn, in dit geval bekijken we alleen de mogelijkheid van de massaloze scalar velden.

5.2.1 Weinberg's No-Go Theorie

Het eerst waar we naar moeten kijken, is hoe de kosmologische constante tijdsafhankelijk te maken is [6, 29]. Hieruit blijkt dat er een No-Go theorie volgt, door bepaalde condities is het niet mogelijk om een oplossing te vinden voor het veld ϕ . De condities van een theorie waardoor deze No-Go theorie geldt zijn

- Algemene covariantie;
- Conventionele gravitatie is onder uitwisseling van een massaloze graviton;
- De theorie bevat een eindig aantal velden onder de cutoff;
- Theorie heeft geen negatieve norm toestanden;
- De velden worden constant bij late tijden.

Deze No-Go theorie zorgt voor een serieus obstakel in het zoeken naar een geschikte manier om de kosmologische constante tijdsafhankelijk te maken.

5.2.2 Instabiliteiten in dS-ruimte

Toch zijn er pogingen gedaan om de No-Go theorie te omzeilen. Er is een mogelijkheid door te kijken naar de instabiliteiten in dS-ruimte. Een voorbeeld van een instabiliteit in dS-ruimte

is het volgende. Het blijkt namelijk dat de verwachtingswaarde van ϕ^2 tijdsafhankelijk is doordat een scalar veld dat minimaal gekoppeld is geen dS-invariante vacuüm toestand heeft. De verwachtingswaarde is dan

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{H^3}{4\pi^3} t. \quad (5.7)$$

Dit heeft effect op de energie-momentum tensor als men interacties toestaat, waardoor er bijvoorbeeld een $\lambda\phi^4$ term bijkomt zodat voor de verwachtingswaarde van de energie-momentum tensor geldt

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle \sim \lambda \langle \phi^2 \rangle^2 g_{\mu\nu} \propto t^2. \quad (5.8)$$

In dit geval gaat het om de zogenaamde infrarood divergentie, door interacties zien we dat $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ toe zal nemen in de tijd, echter wanneer hogere contributies belangrijk worden zal deze groei stoppen. We zien nu wel dat het in ieder geval mogelijk is om voor de kosmologische constante een tijdsafhankelijkheid te zoeken.

Een van de eerste pogingen om met behulp van de instabiliteiten in dS-ruimte de kosmologische constante dynamisch te reduceren werd gedaan door Dolgov [30]. Hij maakte gebruik van de conformeel gekoppelde actie. Deze lijkt op de actie met de minimale koppeling (4.4), alleen de potentiaal $V(\phi)$ is vervangen door een term die de massa beschrijft die afhangt van de kromming van de ruimtetijd. Hierdoor krijgen we de actie

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\partial_\nu \phi) - \frac{1}{2} \xi R \phi^2 \right] \quad (5.9)$$

waarin R de Ricci scalar is en ξ een bepaalde constante. Nu kunnen we hieruit een Lagrangiaan dichtheid halen die we kunnen schrijven als

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \xi R \phi^2) \quad (5.10)$$

waaruit de bewegingsvergelijking volgt als

$$(\square + \xi R) \phi = 0. \quad (5.11)$$

Deze vergelijking lijkt erg op een vergelijking die we al eerder zijn tegen gekomen, namelijk (2.18) en dat is ook niet zo raar aangezien alleen de potentiaal term veranderd is van $\propto m^2$ naar $\propto \xi R$. We kunnen nu de Einstein vergelijking erbij halen met de kosmologische constante (4.61). Als we kijken naar de eerste componenten, dan krijgen we dus $R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 8\pi G T_{00} + g_{00} \Lambda$ en met behulp van de Friedmann vergelijking volgt hieruit

$$3H^2(t) = \Lambda + 8\pi G \rho_\phi \quad (5.12)$$

waarbij ρ_ϕ de energiedichtheid van het scalar veld is. Deze energiedichtheid kunnen we berekenen door middel van de energie-momentum tensor. De energie-momentum tensor voor de actie (5.9) is

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi - \xi \phi^2 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \\ & - \xi \nabla_\mu \nabla_\nu \phi^2 + \xi g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha \phi^2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

waaruit volgt voor de energiedichtheid van een scalar veld (de T_{00} component)

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + 3\xi H^2 \phi^2 + 6\xi H \dot{\phi} \quad (5.14)$$

en de bewegingsvergelijking voor ϕ (5.11) kunnen we opschrijven als een functie met de schaalfactor

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + 6\xi \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] \phi = 0. \quad (5.15)$$

Doglov ontdekte dat het scalar veld niet altijd stabiel is, voor negatieve waarden van ξ is het veld instabiel waardoor de effectieve kosmologische constante snel naar nul vervalst. We bekijken de vergelijkingen (5.12) en (5.14) en halen de $3\xi H^2 \phi^2$ naar de linkerkant van (5.12). Hierdoor krijgen we

$$3H^2(t) = \Lambda + 8\pi G \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + 3\xi H^2 \phi^2 + 6\xi H \phi \dot{\phi} \right) \quad (5.16)$$

$$3H^2 (1 - 8\pi G \xi \phi^2) = \Lambda + 8\pi G \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + 6\xi H \phi \dot{\phi} \right) \quad (5.17)$$

$$3H^2 \simeq \frac{\Lambda}{1 - 8\pi G \xi \phi^2} + \dots \quad (5.18)$$

en de $3H^2$ wordt in een dS ruimtetijd gelijk aan de effectieve kosmologische constante Λ_{eff} en met behulp van (5.15) kunnen we kijken hoe $\phi(t)$ afhangt van de tijd waardoor we zien hoe de effectieve kosmologische constante zich gedraagt. In vroege tijden kunnen we (5.15) oplossen waaruit volgt

$$\phi(t) = \phi_0 e^{\gamma t}; \quad \text{waarbij} \quad \gamma = \frac{3}{2} H \left[\left(1 + \frac{16}{3} |\xi| \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \quad (5.19)$$

dus in vroege tijden zien we dat $\phi(t)$ steeds groter wordt wat betekent dat de effectieve kosmologische constante steeds kleiner wordt als $\xi < 0$.

$$\Lambda_{\text{eff}} = \frac{\Lambda}{1 + 8\pi G |\xi| \phi^2} \quad (5.20)$$

Op latere tijdstippen blijkt dat $\phi(t) \propto t$ waaruit volgt dat $\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda_{\text{eff}} \rightarrow 0$. De kosmologische constante kan dus groot zijn in het begin en wordt steeds kleiner zoals we willen. Echter, deze methode heeft een vervelend effect op de constante van Newton G , want deze zal hierdoor ook veranderen in de tijd met een effectieve constante van Newton

$$G_{\text{eff}} = \frac{G}{1 + 8\pi G |\xi| \phi^2} \rightarrow 0 \quad \text{als } t \rightarrow \infty \quad (5.21)$$

en dit komt niet overeen met observaties, waardoor dit toch geen oplossing voor het probleem is, ondanks dat het er veel belovend uitzag aangezien de kosmologische constante zich gedraagt zoals we willen. Dit is natuurlijk niet de enige mogelijkheid om de kosmologische constante tijdafhanke-lijk te maken en de No-Go theorie te omzeilen, maar tot op heden is er nog geen oplossing gevonden die het probleem van de kosmologische constante kan oplossen zonder dat daar vervelende effecten bij komen kijken.

5.3 Het multiversum en antropisch selectiemechanisme

Dit idee is gebaseerd op statistische kansen en de zogenaamde *string landscape* [27]. De snaartheorie is gebaseerd op het idee dat de elementaire deeltjes geen puntdeeltjes zijn, maar open of gesloten snaren. Doordat snaren op een bepaalde manier trillen vormen ze een bepaald deeltje. Om negatieve massa's te voorkomen is supersymmetrie nodig en de ruimtetijd moet 10 dimensies hebben om consistent te zijn. Om snaartheorie realistisch te maken moeten 6 dimensies gecompactificeerd worden om een 4 dimensionele ruimtetijd over te houden en verder moet supersymmetrie gebroken zijn (in ieder geval tot 10^3 GeV). Momenteel zijn er 5 consistente snaartheorieën met een onderliggende M-theorie. Normaal, in 10 dimensies, heeft snaartheorie twee vrije parameters [27], maar door 6 dimensies te compactificeren komen er extra parameters. Wanneer de 5 consistente snaartheorieën gecompactificeerd zijn op een bepaalde manier vanuit hun 10 dimensionele ruimtetijd, dan kunnen we deze theorieën parameteriseren met een set parameters die we *moduli* noemen. Deze moduli zijn gerelateerd aan de vacuüm verwachtingswaardes van verschillende

dynamische velden en deze hebben verschillende waarden afhankelijk van de gebroken supersymmetrie. Dit betekent dus dat er vanuit de snaartheorie verschillende 4 dimensionele vacua kunnen zijn, waardoor er dus verschillende ρ_{vac} kunnen zijn. Hoeveel verschillende vacua er kunnen zijn is nog onduidelijk, echter een grove schatting laat zien dat men zou kunnen verwachten dat er zo'n $\sim 10^{1000}$ [29] verschillende vacua zouden kunnen zijn¹ en dat er tussen elk vacuüm een energie verschil is van zo'n $\sim 10^{-1000} \Lambda_{\text{planck}}^4$ (een homogene verdeling). In ons universum hebben we echter te maken met één vacuüm, dus stel dat er meerdere universa zijn, een *multiversum*, dan heb je dus een bepaalde kans wat het vacuüm toestand is in dat universum. Dus stel we hebben $\sim 10^{1000}$ universa, dan heb je dus een bepaalde kansverdeling van de vacua en de energiedichtheid die daarbij hoort. Het antropisch selectiemechanisme verteld ons dat sommige parameters die het universum bepalen niet uit fundamentele theorieën komen, maar uit het feit dat intelligente waarnemers alleen die waarden observeren die intelligent leven mogelijk maken. Uit de bovengenoemde $\sim 10^{1000}$ vacua zouden er zo'n $\sim 10^{500}$ vacua geobserveerd kunnen worden door intelligente observatoren. De overige vacua kunnen niet waargenomen worden; als de energiedichtheid van het vacuüm te groot is dan zal het universum te snel expanderen, waardoor stervorming al erg lastig wordt en intelligent leven lijkt zich onmogelijk te kunnen vormen, als de energiedichtheid van het vacuüm negatief is (in dat geval heb je een Anti de Sitter ruimte, kortweg AdS) dan zorgt dit voor een big crunch, bij erg negatieve waarde volgt er al vrij snel een big crunch, waardoor intelligent leven zich niet heeft kunnen vormen. Dus dan is het logisch dat wij een kosmologische constante meten van $\sim 10^{-120} \Lambda_{\text{planck}}^4$. Deze methode vertelt ons dat het logisch is dat de experimentele waarde niet zo groot kan zijn als de theoretische waarde.

5.4 Discussie

De suggesties die hier gegeven zijn, zijn slechts enkele van de vele suggesties die in de loop der jaren voorbij zijn gekomen. Toch hebben alle suggesties tot op heden iets met elkaar gemeen, ze vormen niet de gewenste oplossing die gezocht wordt voor dit probleem. Alle theorieën hebben hun onaantrekkelijkheden, bij de een blijft de vacuüm contributie aan de kosmologische constante te groot en bij de ander treden er vervelende effecten op of is de theorie simpelweg niet te testen. Het ziet er naar uit, dat de huidige natuurwetten tekort schieten om dit probleem op te lossen, een theorie die dieper hierop kan ingaan heeft meer kans om een oplossing te vinden. In dat opzicht is het zeer interessant wat een consistente en complete theorie van quantum gravitatie doet met dit probleem. Een theorie van quantum gravitatie is zojuist al voorbij gekomen, namelijk de snaartheorie. We zagen zojuist dat uit de snaartheorie volgt dat je een *string landscape* hebt en dat er dus veel verschillende vacuüm toestanden gemaakt kunnen worden aan de hand van snaren. Voorlopig blijft het probleem onopgelost en alleen daarom blijft het een uitdaging om een oplossing te vinden.

¹Dit komt doordat geschat wordt dat de compactificatie zo'n 1000 of meer vrijheidsgraden kan opleveren.

Hoofdstuk 6

Conclusie

De introductie van de quantumveldentheorie loste een aantal problemen op, het creëerde op zijn beurt weer nieuwe problemen, ogenschijnlijk nog groter dan de problemen die het oploste. Een voorbeeld van zo'n probleem is de energie van het vacuüm, waar deze nog eindige waarden had in klassieke theorieën en in de quantum mechanica, divergeert de energie van het vacuüm in de quantumveldentheorie (2.47) en krijgt het geen eindige waarde. Door een fysisch argument is dit probleem nog te omzeilen, waaruit volgt dat de energiedichtheid van het vacuüm $\rho_{vac} \sim 10^{74} \text{ GeV}^4$ is. Dit is geen probleem zolang er geen zwaartekracht bij komt, men kijkt dan toch alleen naar energie verschillen en dan zal de bijdrage van het vacuüm weer wegvallen. Nu kan men zich afvragen of deze energiedichtheid wel een reëel effect is. Dit kan door te kijken naar de quantumfluctuaties van het vacuüm. Uit berekeningen van Casimir blijkt dat deze fluctuaties ervoor zouden zorgen dat twee ongeladen, geleidende platen in het vacuüm elkaar aantrekken. Deze voorspelling is door verschillende experimenten bevestigd, waardoor we de energiedichtheid van het vacuüm als een reëel effect kunnen zien. Nu kunnen we bekijken wat er gebeurd als gravitatie een rol gaat spelen. Als gravitatie een rol gaat spelen, dan volgt eruit dat de energiedichtheid van het vacuüm equivalent is aan de kosmologische constante, de parameter die nog ingevoerd was door Einstein. Aan deze kosmologische constante kunnen metingen worden gedaan waaruit een boven limiet volgt voor de energiedichtheid van het vacuüm van $\rho_{vac} \sim 10^{-47} \text{ GeV}^4$. Dit verschil levert de beroemde factor $\sim 10^{120}$ op. Dit is een probleem, waarom is de theoretische waarde zoveel groter dan de experimentele waarde? Er zijn onderhand veel suggesties om dit probleem op te lossen, waaronder supersymmetrie, een tijdafhankelijke kosmologische constante, uit antropische redeneringen, maar geen van alle suggesties geven een bevredigend antwoord tot zover. Het lijkt er daarom op dat het wachten is op een complete en consistente theorie van quantum gravitatie voordat dit probleem wellicht opgelost kan worden.

Bijlage A

Notatie

Over het algemeen wordt in het verslag een bepaalde notatie gehanteerd. Een handige notatie om te gebruiken is $\hbar = c = 1$, dit om formules te vereenvoudigen, echter mocht het nodig zijn om \hbar en c te gebruiken, zoals in sectie 3.3, dan zal dat vermeldt worden. De eenheden voor fysische grootheden zijn hierdoor als volgt.

$$[\text{Lengte}] = [\text{Tijd}] = [\text{Energie}]^{-1} = [\text{Massa}]^{-1} \quad (\text{A.1})$$

Aangezien de eenheid van energie in GeV is, zien we meteen dat de massa ook uitgedrukt wordt in GeV en tijd en lengte worden in GeV^{-1} uitgedrukt. De waarden van de constanten in SI eenheden zijn

$$\begin{aligned} \hbar &= 1,054571 \cdot 10^{-34} \text{Js} \\ c &= 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1} \\ G &= 6,674 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Doordat er vier dimensies zijn, wordt er gewerkt met vier vectoren; de covariante en contravariante vectoren. Deze vectoren zijn als volgt

$$\text{Contravariant} \quad x^\mu = (t, x, y, z) \quad (\text{A.3})$$

$$\text{Covariant} \quad x_\mu = (t, -x, -y, -z) \quad (\text{A.4})$$

waarbij $\mu = 0, 1, 2, 3$. Dus $x_0 = x^0$ en $x_i = -x^i$ waarbij $i = 1, 2, 3$ en deze $x^i = \vec{x}$ de vector in de x, y en z-richting is. Voor vier vectoren worden dus griekse indices gebruikt; voor drie vectoren worden latijnse indices gebruikt. De inproduct van twee dezelfde viervectoren gelijk is aan

$$x \cdot x = \sum_{\mu=0}^3 x_\mu x^\mu = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu = \sum_{\mu,\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (\text{A.5})$$

waarbij $g_{\mu\nu}$ de metriek tensor is. Door gebruik te maken van de **Einstein sommatie conventie**, die ons verteld dat we bij gelijke indices boven en onder moeten sommeren over die indices, krijgen we

$$x \cdot x = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu. \quad (\text{A.6})$$

We maken gebruik van een lorentz invariante lengte

$$s^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x \cdot x \quad (\text{A.7})$$

wat dus betekend dat een viervector in het kwadraat gelijk is aan een lorentz invariante eenheid. Aan de hand hiervan wordt de standaard metriek gedefiniëerd.

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu = 0 \\ -1 & \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Doordat μ en ν van 0 tot 3 lopen, krijgen we een 4 bij 4 matrix als metriek tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Een metriek met (A.9) wordt ook wel de Minkowski metriek genoemd en genoteerd als $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Vervolgens is $g^{\mu\nu}$ de inverse van $g_{\mu\nu}$; voor de Minkowski metriek geldt $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. De gebruikte metriek van (A.9) wordt ook wel de 'mostly minus' metriek genoemd, aangezien je ook de 'mostly plus' kan opstellen met $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Er is namelijk geen fysisch verschil in het gebruik van de 'andere' metriek, alleen zullen sommige formules veranderen doordat er een - teken bijkomt. Als standaard metriek zal (A.9) gebruikt worden.

Lorentz transformatie

Zoals we uit vergelijking (A.5) zien, kunnen we x_μ schrijven als

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu. \quad (\text{A.10})$$

Stel dat we naar een ander inertiaalsysteem overgaan, dan weten we dat de s^2 uit (A.7) een behouden grootte is, dus krijgen we

$$t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (\text{A.11})$$

waarbij de nieuwe coördinaten x'^μ opgeschreven kan worden als functie van de oude coördinaten

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (\text{A.12})$$

$$x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu \quad (\text{A.13})$$

waarbij Λ^μ_ν de Lorentz transformatie matrix is (niet te verwarren met de kosmologische constante) en als geldt dat

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu \quad (\text{A.14})$$

dan spreken we van een Lorentz transformatie. Let op dat $\Lambda^\mu_\nu \neq \Lambda_\mu^\nu$ omdat

$$x'_\mu x'^\mu = \Lambda_\mu^\nu \Lambda_\nu^\mu x_\nu x^\nu \quad (\text{A.15})$$

waarbij $x \cdot x$ Lorentz invariant is, dan volgt daaruit dat $\Lambda_\mu^\nu \Lambda_\nu^\mu = 1$; dus Λ_μ^ν is de inverse matrix van Λ^μ_ν .

Afgeleides

Een divergentie in drie dimensies noteren we met een nabla $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = \frac{\partial}{\partial x^i}$ waarbij i gesommeerd wordt van 1 tot 3. In vier dimensies zit ook de $i = 0$ component erbij, waardoor we het volgende kunnen noteren.

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_t, \vec{\nabla}) = \partial_\mu \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial_t, -\vec{\nabla}) = \partial^\mu \quad (\text{A.17})$$

Uit de combinatie van deze afgeleides krijgen we

$$\partial_\mu \partial^\mu = \square = \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 \quad (\text{A.18})$$

waarbij \square de d'Alembertian genoemd wordt. De Lorentz transformatie van de afgeleiden is

$$\partial'_\mu = \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu \quad (\text{A.19})$$

$$\partial'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \partial^\nu \quad (\text{A.20})$$

waaruit volgt dat de transformatie matrix geschreven kan worden als

$$\Lambda_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}. \quad (\text{A.21})$$

Tensoren

Hierboven staan al twee tensoren; de metriek tensor $g_{\mu\nu}$ en de Lorentz transformatie matrix Λ_{ν}^{μ} . Om preciezer te zijn, dit zijn tensoren met rank 2 en deze kunnen gerepresenteerd worden door een matrix. Een tensor met rank 0 bestaat ook, dat is gewoon een scalar en deze noteren we als A . Een (contravariante) tensor met rank 1 is een vector A^{μ} . De metriek tensor $g_{\mu\nu}$ is een covariante tensor, de inverse van de metriek is een contravariante tensor $g^{\mu\nu}$. De Lorentz transformatie matrix heeft een index boven staan en een index onder, dit is een gemixte tensor. De Lorentz transformatie van een contravariante tensor gaat als volgt.

$$A^{\mu\nu} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} A^{\alpha\beta} \quad (\text{A.22})$$

Voor een symmetrische tensor geldt dat de indices verwisseld kunnen worden;

$$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu} \quad \text{of} \quad A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}. \quad (\text{A.23})$$

Een voorbeeld van de symmetrische tensor is de metriek tensor, dus geldt $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Een anti-symmetrische tensor wordt negatief bij het verwisselen van de indices;

$$A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu} \quad \text{of} \quad A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}. \quad (\text{A.24})$$

Er zijn ook hogere orde tensoren, zoals het Christoffel symbool $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$, een tensor met rank 3. Een tensor met rank 3 kan (zoals in geval van het Christoffel symbool) gevormd worden door vermenigvuldiging van tensoren. Voor een algemene tensor met rank 3 geldt dan

$$A_{\mu\nu}^{\alpha} = B^{\alpha} C_{\mu\nu} = D^{\alpha\beta} E_{\beta\mu\nu}. \quad (\text{A.25})$$

Het Christoffel symbool hangt af van de metriek tensor.

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} [\partial_{\nu} g_{\mu\beta} + \partial_{\mu} g_{\nu\beta} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu}] \quad (\text{A.26})$$

Covariante afgeleide

Om ervoor te zorgen dat het actie principe gebruikt kan worden wanneer gravitatie een rol speelt, moet de poincaré invariante actie veranderen in een algemene covariante actie. Hiervoor moeten de partiële afgeleides ∂_{μ} vervangen worden door de covariante afgeleides ∇_{μ} . De covariante afgeleide is een tensor die gereduceerd wordt tot een partiële afgeleide van een vector veld in cartesische coördinaten. Voor een scalar geldt dat de covariante afgeleide gelijk is aan de partiële afgeleide; $\nabla_{\mu} A = \partial_{\mu} A$, waarbij A een willekeurige scalar is. Voor een vector komt er een extra term bij, aangezien er zowel een covariante (U_{μ}) als een contravariante (U^{μ}) vector bestaat, zijn er dus twee mogelijkheden. Voor een willekeurige vector geldt

$$\nabla_{\mu} U_{\nu} = \partial_{\mu} U_{\nu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} U_{\alpha} \quad (\text{A.27})$$

$$\nabla_{\mu} U^{\nu} = \partial_{\mu} U^{\nu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} U^{\alpha} \quad (\text{A.28})$$

waarbij het Christoffel symbool Γ hierboven (A.26) gedefiniëerd is. We kunnen de covariante afgeleide ook gebruiken bij tensoren, waaruit dan volgt

$$\nabla_{\alpha} U_{\mu\nu} = \partial_{\alpha} U_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} U_{\beta\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} U_{\mu\beta} \quad (\text{A.29})$$

$$\nabla_{\alpha} U^{\mu\nu} = \partial_{\alpha} U^{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} U^{\beta\nu} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} U^{\mu\beta} \quad (\text{A.30})$$

waarbij $U_{\mu\nu}$ een willekeurige covariante tensor is en $U^{\mu\nu}$ een willekeurige contravariante tensor.

Bibliografie

- [1] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice-Hall, third edition (1999)
- [2] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, third edition (1999)
- [3] A. Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik, **17** 891 (1905)
- [4] V. F. Mukhanov en S. Winitzki, *Introduction to Quantum Fields in Classical Backgrounds*, Lecture notes (2004)
- [5] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Pearson education, second edition (2005)
- [6] S. Weinberg, *The cosmological constant problem*, Rev. Mod. Phys. Vol. 61, No.1 (1989)
- [7] H. B. G. Casimir, *On the attraction between two conducting plates*, Proc. Kon. Nederland. Akad. Wetensch **B51**, 793 (1948)
- [8] H. B. G. Casimir en D. Polder, *The Influence of Retardation on the London-van der Waals Forces*, Physical Review, Vol. 73 pp. 360-372 (1948)
- [9] E. Kreyszig, *Advanced engineering mathematics*, Wiley **9th** edition (2006)
- [10] T. M. Apostol, *An Elementary View of Euler's Summation Formula*, American Mathematical Monthly, volume **106**, number 5 (1999)
- [11] H. M. Edwards, *Riemann's zeta function*, Academic Press (1974)
- [12] S. K. Lamoreaux, *Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6 mm Range*, Physical Review Letters, Vol. 78 number 1 (1997)
- [13] U. Mohideen en A. Roy, *Precision Measurement of the Casimir Force from 0.1 to 0.9 mm*, Physical Review Letters, Vol. 81 number 21 (1998)
- [14] G. Bressi, G. Carugno, R. Onofrio en G. Ruoso, *Measurement of the Casimir Force between Parallel Metallic Surfaces*, Physical Review Letters, Vol. 88 number 4 (2002)
- [15] M. J. Sparnaay, *Measurement of attractive forces between flat plates*, Physica **24**, pp. 751 (1958)
- [16] A. Sarlemijn, M. J. Sparnaay (Eds.), *Physics in the Making*, (1989)
- [17] R. L. Jaffe, *Casimir effect and the quantum vacuum* Phys. Rev. D **72** (2005)
- [18] J. Schwinger, *Casimir effect in source theory*, Lett. Math. Phys. **1** pp. 43 (1975)
- [19] J. Schwinger, L. DeRaad en K. A. Milton, *Casimir Effect in Dielectrics*, Ann. Phys. **115** pp. 1 (1978)
- [20] M. Trodden en S. M. Carroll, *Introduction to Cosmology*, arXiv:astro-ph/0401547v1, (2004)
- [21] B. Ryden, *Introduction to Cosmology*, Pearson Education (2003)

- [22] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, Elsevier (2003)
- [23] D. N. Spergel et al., *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters*, arXiv:astro-ph/0302209v3 , (2003)
- [24] T. Padmanabhan, *Cosmological Constant - The Weight of the Vacuum*, arXiv:hep-th/0212290v2 , (2003)
- [25] S. M. Carroll, *The Cosmological Constant*, arXiv:astro-ph/0004075v2 , (2000)
- [26] A. A. Starobinsky, *Beyond the Simplest Inflationary Cosmological Models*, arXiv:astro-ph/9811360, (1998)
- [27] J. Polchinski, *The Cosmological Constant and the String Landscape*, arXiv:hep-th/0603249v2, (2006)
- [28] V. Shani en A. A. Starobinsky, *The Case for a Positive Cosmological Lambda-term*, arXiv:astro-ph/9904398v2, (2000)
- [29] S. Nobbenhuis, *The Cosmological Constant Problem, an Inspiration for New Physics*, arXiv:gr-qc/0609011v1, (2006)
- [30] A. D. Dolgov, *An attempt to get rid of the cosmological constant*, In *Cambridge 1982, Proceedings, The Very Early Universe*, 449-458, (1982)
- [31] E. Tetteh-Lartey, *Unification, the Big Bang, and the Cosmological Constant*, arXiv:physics/0608188v1, (2006)