HOOFDSTUK 8.6 OORSPRONG EN FUNCTIE VAN IP's

Het is nogal van belang om een goed inzicht te hebben in de herkomst van interne parameters en hoe hun aanwezigheid in de wortels van de elementen van de verzameling van de kubieke vergelijkingen kan worden verklaard.

Gevonden werd al dat α- en β-IP's wortels zijn van een bijzondere zevende- resp. negendemachts vergelijking. Die wortels bezitten de unieke eigenschap dat zij, per vergelijking in een op cyclische eigenschappen gebaseerde ordening, in **drietallen** zijn te verdelen. Er ontstaat zo een mogelijkheid dat die wortels in beeld komen bij onderzoeken naar de wortels van **kubieke** vergelijkingen. De erbij betrokken cyclische (kubieke) vergelijkingen blijken afleidbaar en liggen ten grondslag aan het lopende onderzoek.

Dat onderzoek heeft vervolgens vorm gekregen door de afleiding van de fundamentele vergelijkingen, waarmee het niet alleen mogelijk werd de verzameling van de kubieke vergelijkingen zonder dubbele wortels te systematiseren, maar ook om relaties tussen de wortels van de representanten van die kubieke vergelijkingen te onderzoeken. Daarbij is, naar achteraf blijkt, de beslissende keus gemaakt om na het definiëren van een productoperatie tussen fundamentele vergelijkingen, fundvergelijkingen op te vatten als producten van fundamentele nevenvergelijkingen. Er zijn in verband met het teken van hun wortels 2 mogelijkheden om dergelijke producten samen te stellen. Van beide mogelijkheden ligt er steeds één buiten de verzameling van de construeerbare getallen. Dat is het principe achter de aanwezigheid van de α-IP's: de α-transformaties nemen de niet in K liggende productvarianten voor hun rekening. Zij zijn in die zin vergelijkbaar met imaginaire getallen, want die nemen evenzo de buiten R liggende gevallen voor hun rekening. De aanwezigheid van α-IP's in de verzameling van de wortels van de fundamentele vergelijkingen is dus louter functioneel en wordt opgeroepen door de dualiteit achter het begrip 'voortbrenging door paren fundamentele nevenvergelijkingen'.

Ook de vergelijking $\beta^3+3\beta^2-9\beta-3=0$ speelt een unieke rol bij de vorming van producten. Er geldt dat $\beta^3+3\beta^2-9\beta-3 \otimes f^3+(3c_i)f^2-9f-(3c_i) = h^3+(3c_k)\ h^2-9h-(3c_k)$ met c_i gelezen als funds. Deze vermenigvuldiging is drie maal te herhalen en dan heeft men de eerste vergelijking weer tot uitkomst omdat de coëfficiënten de funds c_i doorlopen. Dit sluit enigszins aan bij het algemeen geldende verband $\frac{1}{3}PC(a,b)=P\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3}\right)$.

Er is nog geen invulling voor al deze eigenschappen gevonden.

De directe aanleiding voor het zoeken naar eigenschappen van IP's was de totaal onverwachte conflictsituatie die ontstond t.g.v. een essentiële stelling in Hoofdstuk 4, die gemakshalve hier herhaald wordt:
Stel dat $fp_1 \in K$ en $gp_1 \notin K$. Wegens $fp_i \in K$ geldt $\sqrt{4p-7}\ \in K$ waardoor de nevenvergelijkingen alle coëfficiënten in K hebben; de funds $gp_i \notin K$ hebben dan IP's zodat $\frac{fp_i+gp_i}{2}=s_i\ \notin K$. We stellen dat $fp_i=s_i+m_i\sqrt{4p-7}$ en $gp_i=s_i-m_i\sqrt{4p-7}$. Voor die fp_i geldt dat $s_i \notin K$ en $\sqrt{4p-7}\ \in K$ waardoor $m_i \notin K$. Dan geldt er dat $fp_i-gp_i=2m_i\sqrt{4p-7} \notin K$ en $fp_i+gp_i=2s_i\ \notin K$, zodat $fp_i \wedge gp_i \notin K$. Dit is in tegenspraak met $fp_i \in K$ zodat met fp_i ook gp_i tot K moeten behoren. Deze afleiding is m.m. ook geldig voor het geval dat $fp_1 \in Q$ en $gp_1 \notin Q$.

Als een fundvergelijking een wortel in Q c.q. K heeft dan liggen de wortels van zijn nevenvergelijking en de wortels van hun productvergelijking eveneens in Q resp. K.

We hebben nu met het volgende probleem te maken: als $P(fp_i,gp_i) \notin K$ dan hebben fp_i en gp_i een ongelijke structuur. Omdat er geldt dat fp_i en gp_i beide tot K of beide niet tot K behoren kan die structuur alleen gerealiseerd worden d.m.v. constructies als $fp_i = P(c_i, IP)$ en $gp_i = P(IP, d_i)$ of andersom. Stel dat er geldt $fp_i = P(c_i, \alpha)$ en $gp_i = P(\alpha, d_i)$. De α-transformaties van deze wortels geven $fqt_i = c_i \in K$ en $gqt_i = P(P(\alpha, d_i), \alpha) \notin K$. Die α-transformaties leveren fundamentele nevenvergelijkingen op met wortels die niet aan de eerder genoemde eigenschap voldoen. Ongelijke structuren die middels α-IP's worden gerealiseerd, zoals $fp_i = P(c_i, \alpha)$ en $gp_i = P(\alpha, d_i)$, zijn echter altijd mogelijk omdat er aan $PC(C, 1) + PC(1, D) = 2$ steeds een oplossing $C = \frac{15D-1}{D+13}$ voldoet, aannemende dat $D + 13 \neq 0$.

Bovenstaande conclusie leidt direct tot een conflict met de eerdere afleiding, zodat er een context moet bestaan waarbinnen dat conflict zich niet kan voordoen. De vervanging van α door β schept zo'n context omdat er, zonder de aanwezigheid van β-IP's daarin, geen ongelijke structuren bij nevenfunds kunnen voorkomen. Dat houdt enerzijds in dat nevenfunds zonder β-IP's geen ongelijke structuren kunnen opleveren en dus tot K moeten behoren en anderzijds dat nevenfunds met alleen α-IP's niet tot K kunnen behoren. Eigenlijk wisten we het ten dele al, maar dan zonder dat er sprake was van de connotaties bij 'kunnen' en 'moeten'. Bovendien blijkt de reden voor de aanwezigheid van β-IP's dezelfde te zijn als bij de α-IP's: het onmogelijke mogelijk maken.

De principe waarbij voor het oplossen van n-de machtsvergelijkingen gebruik wordt gemaakt van - op basis van hun cyclische eigenschappen - geordende n-tallen van de wortels van nog-hogere machtsvergelijkingen ligt aan de basis van de door Galois ontwikkelde theorie voor het oplossen van de hogere machtsvergelijkingen in het algemeen. Die theorie betreft vooral de groepentheorie en is erg abstract. Alhoewel deze studie probeert de oplossing van de derdemachtsvergelijkingen cijfermatig te berekenen doen er zich kennelijk toch momenten van herkenning voor.

0-0-0-0-0-0-0