

### Principe der Volledige Inductie

Één van de pijlers van de moderne wiskunde is het "*Principe der Volledige Inductie*".

Zij  $P(n)$  een uitspraak, die gedefinieerd is voor *elk* natuurlijke getal  $n \geq k$  ( $k$  ook een natuurlijk getal) met de volgende eigenschappen:

- a.  $P(k)$  is waar
- b.  $P(n+1)$  is waar, wanneer  $P(n)$  waar is

Dan is de uitspraak  $P(n)$  waar voor *elk* natuurlijke getal  $n \geq k$ .

#### Voorbeeld

Stel we moeten de juistheid aantonen van een formule die afhankelijk is van het natuurlijk getal  $n$ , waarbij  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . In schoolboekjes wordt vaak het voorbeeld aangehaald van de formule voor de som der natuurlijke getallen 0 tot en met  $n$ .

$$S_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (n \text{ is een natuurlijk getal})$$

We willen in dit geval bewijzen dat de formule geldig is voor alle waarden van  $n \geq 0$ . Je zou de formule kunnen verifiëren voor  $n = 0$ ,  $n = 1$ ,  $n = 2$  tot en met  $n = 10.000$ . Zou de formule dan telkens kloppen dan zou je geneigd zijn aan te nemen dat de formule juist is voor alle waarden van  $n \geq 0$ . Je weet dit echter niet zeker! Met het principe van de volledige inductie kunnen we de formule *bewijzen* voor alle  $n \geq 0$ .

De stappen bij een bewijs door volledige inductie zijn:

- I. Ga na dat de formule juist is voor zekere  $n$ ,  $n = k$  in bovenstaand voorbeeld  $k = 0$ .
- II. Neem aan dat de formule juist is voor  $n = m$ , waarbij  $m \geq k$ .
- III. Leidt **hieruit** af dat de formule juist is voor  $n = m + 1$ .
- IV. Hieruit mag je dan concluderen dat de formule juist is voor alle  $n \geq k$ .

Immers als de formule juist is voor  $n = 0$ , dan is hij volgens stap III ook juist voor  $n = 1$ . Maar dan ook voor  $n = 2$  enzovoort. Dit noemen we inductie. In de wiskunde wordt veel gebruik gemaakt van het principe van de volledige inductie om stellingen te bewijzen waarin het natuurlijke getal  $n$  voorkomt.

We gaan m.b.v. volledige inductie de juistheid van de formule

$$S_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

voor de som der natuurlijke getallen 0 tot en met  $n$  aantonen.

## Bewijs met volledige inductie

### Stap I

We bewijzen eerst dat de formule juist is voor  $n = 0$ . Volgens de formule geldt:

$$S_0 = \frac{0(0+1)}{2} = \frac{0}{2} = 0 \text{ en dit klopt!}$$

De formule is dus juist voor  $n = 0$ .

### Stap II

Stel de formule is juist voor  $n = m \geq 0$ . Er geldt dus:

$$S_m = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

### Stap III

We gaan nu bewijzen dat hieruit volgt dat de formule is juist voor  $n = m+1$ , dus dat geldt:

$$S_{m+1} = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + m + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

Nu is

$$S_{m+1} = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + m + (m+1)$$

$$= S_m + (m+1)$$

$$= \frac{m(m+1)}{2} + (m+1)$$

$$= \frac{m(m+1)}{2} + \frac{2(m+1)}{2}$$

$$= \frac{m(m+1) + 2(m+1)}{2}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

Hetgeen te bewijzen viel!

Het bewijs kan ook vrij eenvoudig direct geleverd worden. Er geldt:

$$S_n = 0 + 1 + 2 + \dots + n - 1 + n$$

$$S_n = n + n - 1 + n - 2 + \dots + 1 + 0$$

$$\begin{array}{r} \hline 2S_n = n + n + n + \dots + n + n \quad \text{(dit zijn } n+1 \text{ termen } n) \\ = n(n+1) \end{array}$$

Daaruit volgt:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Hetgeen te bewijzen viel!